Petits problèmes

Nous proposons ici quelques problèmes, dont l'énoncé est généralement assez simple, mais dont nous n'avons pas de solution satisfaisante. Vous pouvez ainsi apporter votre contribution à Hubris en nous envoyant la réponse à certains de ces problèmes, ou en proposant de nouveaux problèmes. **N.M.**

Solution de **Les bagues de Suleima**
(Problème posé dans le numéro 2 d'Hubris)

Le fiancé de Suleima, orfèvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve de son amour, de lui offrir chaque mois une bague en or différente, incrustée d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a dix pierres précieuse, régulièrement réparties, et se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte. Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ?

Nous allons voir que se problème est un cas particulier d'un problème plus général, à savoir le dénombrement des mots circulaires, et peut se résoudre en faisant appel à la fonction de Möbius. Ce problème de combinatoire sur les mots circulaires est traité dans [B] et c'est sa présentation que nous allons suivre. Pour ce qui concerne la fonction de Möbius, on pourra également se reporter à [NQ].

Les mots circulaires

Désignons par A l'ensemble à trois éléments :

$$A = \{\texttt{emeraude}, \texttt{rubis}, \texttt{saphir}\}.$$

Une bague est déterminée par la donnée d'une application :

$$b : \{1, \ldots, 10\} \to A$$

qui indique la suite des pierres qui la composent. Deux telles applications définissent la même bague dès qu'il existe un entier p tel que pour tout i entre 1 et 10, on ait :

$$b'(i) = b(i + p)$$

(en comptant modulo 10). On définit ainsi une relation d'équivalence sur sur l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, 10\}$ dans A et le nombre de bagues différentes que l'on peut construire est égal au nombre de classes d'équivalence de l'ensemble quotient.

Afin de généraliser ceci, nous allons définir la notion de mot circulaire de longueur n (on avait ici $n = 10$) sur un alphabet fini A que l'on supposera de cardinal m :

- un mot de longueur n sur A est un élément w de A^n qui peut également être vu comme une application :
$$w : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to A,$$
- deux mots de longueur n sur A, w et w', sont dits équivalents si et seulement si il existe $p \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que quel que soit $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ on ait :
$$w'(i) = w(i + p)$$
et on note alors $w \circlearrowleft w'$,
- l'ensemble quotient $A^n/\circlearrowleft$ est appelé ensemble des mots circulaires.

On aura également besoin de la notion de période primitive d'un mot. Un mot w de longueur n sur A induit une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \to & A \\ i & \mapsto & w(\bar{i}) \end{array}$$

(où $\bar{i}$ désigne la classe de i modulo n). L'ensemble des périodes de cette application est un idéal de $\mathbf{Z}$, non vide (il contient n). Il est par conséquent de la forme $p\mathbf{Z}$ où $p \in \mathbf{N}$ est non nul. p est appelé période primitive de w. Remarquons qu'un tel p est nécessairement un diviseur de n.

Pour p compris entre 1 et n et divisant n, on note $M(p)$ l'ensemble des mots circulaires dont un représentant est de période primitive p, on a alors trivialement :

$$\operatorname{card}(A/\circlearrowleft) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ p \mid n}} \operatorname{card}(M(p))$$

(puisque tout mot possède une période primitive).

Intervention de la fonction de Möbius

Pour $k \in \mathbf{N}$ non nul, notons :

$$k = p_1 \ldots p_r$$

une décomposition de k en facteurs premiers. On convient de poser :

– $\mu(k) = 0$ si deux des p_i sont égaux (*i.e.* k contient un facteur carré),
– $\mu(k) = (-1)^r$ sinon.

La fonction μ ainsi définie est appelée fonction de Möbius. On va utiliser le résultat suivant (dit formule d'inversion de Möbius) :

Théorème. — *Soient* f ***et*** g ***deux applications de*** $\mathbf{N}^*$ ***dans*** $\mathbf{Z}$ ***telles que, quel que soit*** $n \in \mathbf{N}^*$***, on ait :***

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ ***on a :***

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Appliquons ceci avec les fonctions :

$$\begin{array}{rlcl} g\colon & \mathbf{N}^* & \to & \mathbf{Z} \\ & n & \mapsto & \mathrm{card}(A^n) = m^n \\ f\colon & \mathbf{N}^* & \to & \mathbf{Z} \\ & p & \mapsto & p \cdot \mathrm{card}(M(p)). \end{array}$$

Comme chaque classe d'équivalence dans $M(p)$ est de cardinal p, on a bien :

$$g(n) = \sum_{\substack{1 \le p \le n \\ d|n}} f(n)$$

et appliquant la formule d'inversion de Möbius, il vient :

$$\begin{aligned} f(p) = p \cdot \mathrm{card}(M(p)) &= \textstyle\sum_{\substack{1 \le q \le p \\ q|p}} \mu\left(\frac{p}{q}\right) g(q) \\ &= \textstyle\sum_{\substack{1 \le q \le p \\ q|p}} \mu\left(\frac{p}{q}\right) m^q \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(A/\circlearrowleft) &= \sum_{\substack{1 \le p \le n \\ p|n}} M(p) \\ &= \sum_{\substack{1 \le p \le n \\ p|n}} \frac{f(p)}{p} \\ &= \sum_{\substack{1 \le p \le n \\ p|n}} \frac{1}{p} \sum_{\substack{1 \le q \le p \\ q|p}} \mu\left(\frac{p}{q}\right) m^q. \end{aligned}$$

Terminons avec une petite application numérique : il y a exactement quatre nombres p entre 1 et 10 divisant 10, il s'agit de :

– $p = 1$: la contribution de ce terme est $\mu(1)m^1 = m = 3$,
– $p = 2$: la contribution de ce terme est :

$$\frac{1}{2}(\mu(2)m + \mu(1)m^2) = \frac{3^2 - 3}{2} = 3,$$

– $p = 5$: la contribution de ce terme est :

$$\frac{1}{5}(\mu(5)m + \mu(1)m^5) = \frac{3^5 - 3}{5} = 48,$$

– $p = 10$: la contribution de ce terme est :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{10}(\mu(10)m + \mu(5)m^2 + \mu(2)m^5 + \mu(1)m^{10}) \\ &= \frac{3 - 3^2 - 3^5 + 3^{10}}{10} = 5880 \end{aligned}$$

ce qui donne finalement 5934 bagues différentes, soit un peu moins de 500 années d'amour pour Suleima.

Références

[B] Claude Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod, 1968.

[NQ] Patrice Naudin and Claude Quitté, *Algorithmique algébrique*, Masson, 1992.

G.d.R., A.B., N.M.

Les couvertures

On se donne un certain nombre de couvertures carrées. La surface totale des couvertures vaut 4. Montrer que les couvertures peuvent recouvrir le carré unité. **N.M.**

Problème d'informatique

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe fini non orienté, et tel que E ne contienne pas de boucle d'un état sur lui-même. Sur chaque sommet de ce graphe, on dispose un certain nombre de jetons (et on nomme « configuration » du graphe une disposition de ces jetons).

Une « partie » est une suite de configurations, partant d'une configuration initiale, et telle que le passage d'une configuration à la suivante est régi par le principe suivant : *si un sommet possède* p *voisins et* $k \ge p$ *jetons, il distribue un jeton à chacun de ses voisins*. Il est clair qu'une partie peut être finie (intuitivement, s'il n'y a pas beaucoup de jetons) ou infinie (intuitivement, s'il y a beaucoup de jetons).

Le nombre total de jetons est donc constant sur une partie. Notons le j.

Notons également $n = |V|$ et $m = |E|$.

Montrer que si une partie est infinie, alors toutes les parties commençant par la même configuration initiale sont infinies.

Montrer qu'une partie est infinie si, et seulement si, elle fait intervenir tous les sommets.

Montrer les équivalence suivantes :

$j > 2m - n$	$\Leftrightarrow$	toutes les parties sont infinies, quelle que soit la configuration initiale
$j < m$	$\Leftrightarrow$	toutes les parties sont finies, quelle que soit la configuration initiale.

N.M.