Livres

Model theory and algebraic geometry,
An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell–Lang conjecture,
E. Bouscaren editor, Springer Verlag,
LNM 1696 (1998)

Rappelons l'objet d'étude de la géométrie algébrique : on se donne un corps (algébriquement clos) k, une famille de polynômes $(P_i)_{i\in I}$ à n indéterminées et on s'intéresse à l'ensemble de ses zéros,

$$\{\,(x_1,\ldots,x_n)\in k^n \ :\ \forall i\in I\ P_i(x_1,\ldots,x_n)=0\,\}.$$

C'est ce que l'on appelle une *variété affine*.

La théorie des modèles formalise cette notion de variété affine (j'entends déjà les mauvaises langues : « comme si la géométrie algébrique avait besoin de cette bourbakisation supplémentaire ! »), que l'on pourra ensuite généraliser, par exemple en remplaçant les corps par des corps différentiels ou des corps réels.

On part d'une « théorie », par exemple la « théorie des corps algébriquement clos de caractéristique 17 » (vous pouvez mettre votre nombre premier préféré à la place de 17, c'est pareil), définie comme l'ensemble des propriétés vérifiées par ces corps et exprimées à l'aide de quantificateurs ($\exists$, $\forall$), d'opérations logiques (et, ou, non), des opérations des corps ($+$, $-$, $\times$) des constantes de ces corps (0 et 1) et de la relation d'égalité. On peut montrer que cette théorie est *complète*, *i.e.*, toute assertion est soit vraie pour tous les corps algébriquement clos de caractéristique 17, soit fausse pour tous.

On peut alors s'intéresser aux *ensembles définissables*, *i.e.*, aux formules $F(x_1,\ldots,x_n)$ en n variables que l'on peut écrire dans la théorie et, pour tout corps k algébriquement clos de caractéristique 17, l'ensemble

$$\{\,(x_1,\ldots,x_n)\in k^n \ :\ F(x_1,\ldots,x_n)\,\}.$$

Les ensembles définissables sont un peu plus généraux que les variétés affines : il s'agit des combinaisons booléennes (union, intersection, complémentaire) de variétés affines. On peut montrer que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique 17 possède l'*élimination des quantificateurs*, *i.e.*, toute formule (dépendant de variables $x_1,\ldots,x_n$) est equivalente à une formule sans quantificateurs. Traduite en termes géométriques, cette assertion n'est autre que le théorème de Chevalley : la projection d'une combinaison booléenne de variétés affines est encore une combinaison booléenne de variétés affines.

On peut continuer cette « bourbakisation » de la géométrie algébrique en donnant des définitions « logiques » des idéaux, de la dimension, etc. — je ne détruis pas le suspense et laisse le lecteur découvrir cela par lui-même.

L'intérêt de cette démarche est double :

– d'une part, appliquer les méthodes de la géométrie algébrique dans d'autres contextes, comme les corps différentiables ou les corps réels ;
– d'autre part, appliquer les méthodes de la logique à la géométrie algébrique, qui permettent de démontrer des résultats qui résistent aux géomètres.

V.Z.

Morse Theory,
J. Milnor,
Princeton University Press, (1963)

Ce livre a pour but d'exposer une démonstration du théorème de périodicité de Bott dans les cas réel et complexe qui s'énonce ainsi :

Théorème. — ***Les classes d'homotopie stables des groupes classiques*** $\mathrm{U}(n)$ ***et*** $\mathrm{O}(n)$ ***sont périodiques, de période*** 2 ***dans le cas complexe,*** 8 ***dans le cas réel.***

Pour démontrer ce théorème de nature algébrique, il est surprenant de passer par des méthodes de géométrie différentielle, en particulier la théorie de Morse. Elle permet, connaissant une fonction sur une variété, de construire un complexe cellulaire de même type d'homotopie que la variété. Ceci est l'objet du premier chapitre. Pour poursuivre, l'auteur a besoin de résultats en géométrie riemannienne. Il développe ainsi la théorie des connexions, des géodésiques, etc. (il en donne d'ailleur un exposé clair). L'étape suivante consiste à étudier l'espace des chemins sur une variété riemannienne et en particulier la fonctionnelle énergie (qui sera la fonction de Morse utilisée), à ce propos il introduit les champs de Jacobi. Il peut ensuite utiliser (après quelques transformations techniques) le théorème de Morse démontré dans la première partie pour donner un complexe cellulaire de même type d'homotopie que l'espace des chemins (qui est une « variété » de dimension infinie). Il ne reste plus qu'à appliquer ceci au cas des variétés $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{O}(n)$ pour conclure. Il faut alors faire une digression sur les espaces symétriques puis retrousser ses manches pour se lancer dans la démonstration de la