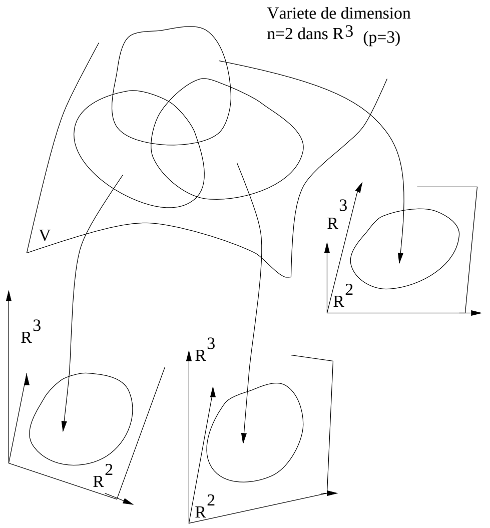
Courbure scalaire et variétés agrandissables

Hélène Davaux
davaux@darboux.math.univ-montp2.fr

Je souhaite donner une idée d'un problème que se posent les géomètres riemanniens en essayant de privilégier l'intuition quitte à perdre une part de la rigueur mathématique de l'exposé. Il s'agit de pouvoir décider si une variété peut ou non porter une métrique à courbure scalaire strictement positive.

Introduction à la géométrie riemannienne...

Les objets qui vont intéresser les géomètres riemanniens sont les *variétés riemanniennes*. Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers des variétés différentielles, pensez à des surfaces de $\mathbf{R}^3$ (au sens commun du terme) et plus généralement, à des sous-ensembles de $\mathbf{R}^p$ qui ressemblent localement à $\mathbf{R}^n$ (avec des recollements adéquats de ses « $\mathbf{R}^n$ » locaux) : nous dirons que ce sont des (sous-)variétés de dimension n (dans $\mathbf{R}^p$). Les variétés de dimension 1 sont les courbes et celles de dimension 2 les surfaces (par exemple la sphère, le tore...). Ceci est illutré par la figure suivante :



Construction d'une variété par recollement

Maintenant que nous avons une idée de ce qu'est une variété, nous voulons la munir d'une structure qui permette de mesurer les longueurs des courbes comme nous avons pu le faire dans le cas des surfaces de $\mathbf{R}^3$ en intégrant la longueur du vecteur vitesse. Il faut donc un moyen de mesurer ce vecteur vitesse. Nous définissons tout d'abord l'*espace tangent* en v à la variété V, noté T_vV, comme l'espace vectoriel de tous les vecteurs vitesses des courbes incluses dans V passant par v. C'est bien un espace vectoriel. De plus, sa dimension est exactement n (l'espace tangent à une surface de $\mathbf{R}^3$ est un plan). Nous introduisons alors une *métrique* g sur une variété V, qui est la donnée en tout point v de V d'un produit scalaire g_v sur T_vV, ce produit scalaire dépend différentiablement du point. La longueur d'un chemin $\gamma : [0,1] \to V$ tracé sur V est alors donné par :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left[g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))\right]^{1/2} \mathrm{d}t.$$

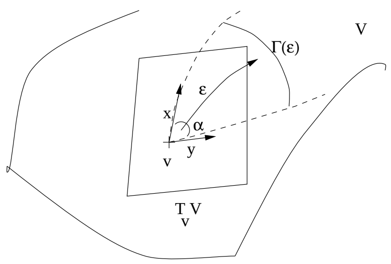
La distance entre deux points de la variété est défini par le minimum des longueurs des chemins reliants les deux points.

Nous voulons maintenant être capable de comprendre la stucture globale de la variété à partir de données infinitésimales. Comme dans le cas des courbes de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, nous introduisons la notion de courbure.

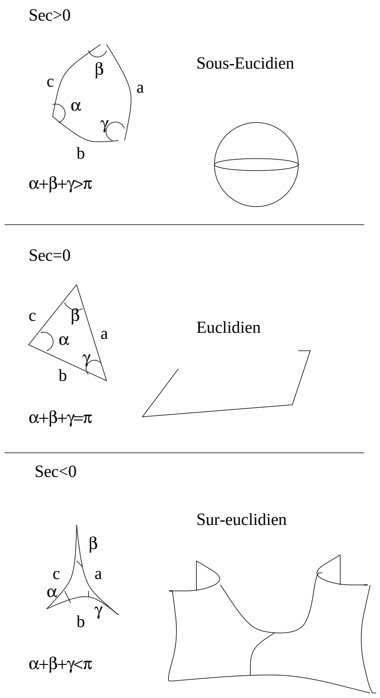
Rappelons que, pour une courbe C, donnée par $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$, paramétrée par longueur d'arc, la *courbure* en $m = \gamma(t)$ de C est le scalaire $\|\gamma''(t)\|$. Nous pouvons aussi définir une *courbure algébrique*. Le théorème fondamental est qu'une courbe plane est déterminée à un déplacement près par sa courbure algébrique. En particulier, si la courbure est localement nulle, la courbe est localement une droite. Dans le cas des courbes de $\mathbf{R}^3$, il faut un autre paramètre pour définir complètement la courbe : la *torsion*.

Pour des variétés de dimension n quelconque, nous allons définir la *courbure sectionnelle*. Comme pour les courbes, elle permet de mesurer le défaut d'euclidienneté. Plus précisément, pour un petit arc de cercle $\Gamma(\varepsilon)$ obtenu sur V en portant la longueur ε sur les géodésiques (*i.e.* les chemins de longueurs critiques — pas forcément minimaux — par exemple les grands cercles pour la sphère) issu du secteur d'angle α déterminé par x et y, où x et y sont des vecteurs indépendants unitaires tangents à la variété en v (voir figure ci-après), nous pouvons donner un développement limité de la longueur de l'arc $\Gamma(\varepsilon)$:

$$L(\Gamma(\varepsilon)) = \alpha\varepsilon(1 - \varepsilon^2 \sec_v(x,y)/6 + o(\varepsilon^2))$$



Signification locale de la courbure sectionnelle



Interprétation du signe de la courbure sectionnelle

où sec_v désigne la courbure sectionnelle en v (nous disons sectionnelle car ici nous venons de nous intéresser au comportement local dans le plan (la section) engendrée par les vecteurs x et y). Remarquons que cette définition n'a pas de sens dans le cas des variétés de dimension 1 (*i.e.* pour les courbes).

Par exemple, dans le plan $\mathbf{R}^2$, quelque soit le point où nous nous plaçons, nous avons $L(\Gamma(\varepsilon)) = \alpha\varepsilon$, d'où $\mathrm{sec}(x, y) = 0$: nous dirons que la courbure sectionnelle est constante, égale à 0. Pour la sphère unité S^2, quelque soit le point où nous nous plaçons, nous avons

$$L(\Gamma(\varepsilon)) = \alpha \sin \varepsilon = \alpha\varepsilon(1 - \varepsilon^2/6 + o(\varepsilon^2)),$$

donc la courbure sectionnelle est constante, égale à 1 ; pour celle de rayon r, la courbure sectionnelle est constante, égale à $1/r^2$.

Comme attendu, la courbure sectionnelle mesure exactement le défaut d'euclidienneté de (V, g) : cette variété est localement isomorphe à l'espace euclidien (nous dirons alors qu'elle est plate) si et seulement si sa courbure sectionnelle est nulle. Ainsi pour une sphère de grand rayon (par exemple la terre), la courbure sectionnelle tend vers zéro, « la sphère devient plate », ce qui est admis par tous les habitants de la planète (à part, peut être, les montagnards).

Le signe de cette courbure a même une interprétation géométrique en terme de triangles (voir figure ci-contre). En effet, selon le signe ($> 0, = 0, < 0$) de la courbure sectionnelle, la somme des angles intérieurs d'un triangle tracé sur la variété est supérieure, égale ou inférieure à π.

... et à la courbure scalaire

En fait, nous allons nous intéresser à une courbure plus faible : la *courbure scalaire*. La signification infinitésimale de la courbure scalaire, notée $\mathrm{sc}_v(V, g)$, est révélée par la formule suivante reliant le volume (longueur en dimension 1, surface en dimension 2) des ε-boules de V (segments centré en dimension 1, disques en dimension 2) de centre v et de l'ε-boule euclidienne B_ε :

$$\mathrm{vol}B_v(V, \varepsilon) = (1 - \varepsilon^2\alpha_n \mathrm{sc}_v(V, g) + o(\varepsilon^2))\mathrm{vol}(B_\varepsilon)$$

où $\alpha_n = [6(n + 2)]^{-1}$.

Ainsi, si la courbure scalaire en v est strictement positive, alors le volume des ε-boules de V en v est strictement inférieur au volume de la boule euclidienne de rayon ε, pour ε suffisamment petit. Inversement, si le volume des ε-boules de V en v est inférieur ou égal au volume de la boule euclidienne de rayon ε, pour ε suffisamment petit, alors la courbure scalaire est positive ou nulle en v. En d'autre terme, la positivité de la courbure scalaire montre que V est « sous-euclidienne » au niveau microscopique. En fait le signe de la courbure scalaire est le même que celui de la courbure sectionnelle. En effet, il existe un lien entre ces deux courbures donné par

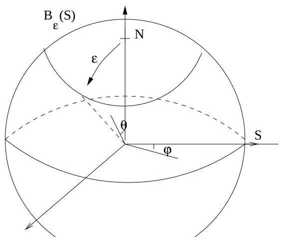
$$\mathrm{sc}_v = 2 \sum_{i<j} \mathrm{sec}_v(e_i, e_j)$$

où les vecteurs e_i forment une base orthonormée de l'espace tangent (T_vV, g_v).

Voyons ceci sur des exemples. En dimension 1, la courbure scalaire est toujours nulle. Pour la sphère unité S^2 muni de la métrique induite par son plongement dans $(\mathbf{R}^3, can)$, nous avons (voir figure cidessous) :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}B_v(V,\varepsilon) &= \int_{\theta=0}^{\varepsilon}\int_{\phi=0}^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi(1-\cos\varepsilon) \\ &= \pi\varepsilon^2(1-\varepsilon^2/12+o(\varepsilon^2))\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{sc}_v(S^2, can) = 2$.



Courbure scalaire de la sphère

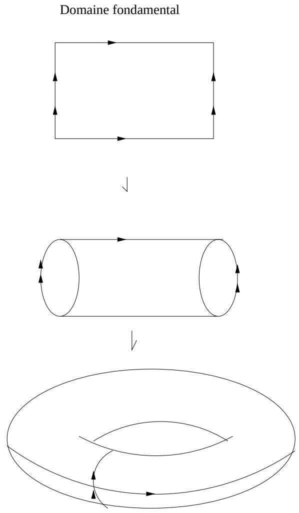
Plus généralement, $\mathrm{sc}_v(S^n) = n(n-1)$ et si nous considérons la sphère de rayon r, $\mathrm{sc}_v(S^n_r) = r^{-2}n(n-1)$. Une autre propriété intéressante est le fait que si nous multiplions la métrique par r^2, la courbure scalaire est divisée par r^2.

Nous avons maintenant une idée de la notion de courbure scalaire. Passons maintenant au problème annoncé dans l'introduction : quand pouvons-nous munir une variété riemanienne (V, g_0) d'une autre métrique g de courbure scalaire strictement positive ? Ce problème semble avoir des conséquences importantes en physique théorique, en particulier dans la théorie de la gravitation, mais je ne saurais en dire plus en raison de mon ignorance dans ce domaine (le lecteur m'en excusera).

Pourquoi la notion d'agrandissabilité ?

Introduction

La notion de variétés agrandissables a été introduite par M. Gromov et B. Lawson en 1980 pour montrer que le tore $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ de dimension n ne porte pas de métrique à courbure scalaire strictement positive. Lorsque nous considérons le tore T^n, nous pouvons le munir de la métrique plate induite par la métrique canonique de $\mathbf{R}^n$. Ainsi le tore porte une métrique à courbure scalaire nulle :



Le tore

Mais ceci ne règle pas le problème de l'existence de métrique à courbure scalaire strictement positive. Commençons par les petites dimensions.

Cas de la dimension 1

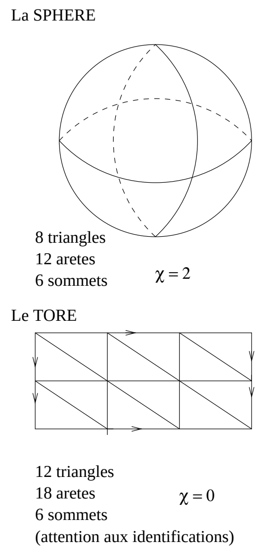
Le cas de la dimension 1 est clair puisque toute courbe, quelque soit la métrique, a une courbure scalaire nulle. Ceci montre en particulier la faiblesse de la courbure scalaire par rapport à la courbure sectionnelle (équivalente de la courbure classique des courbes). Cette courbure ne permet pas de retrouver la structure globale de la variété, comme nous pouvons le faire avec la courbure sectionnelle.

Cas de la dimension 2

Le cas de la dimension 2 est déjà plus intéressant et non trivial. Il nécessite un théorème fondamental pour les surfaces : le théorème de Gauss-Bonnet. Nous devons d'abord définir la *caractéristique d'Euler* d'une surface V, noté $\chi(V)$. A partir d'une triangulation de la variété V, nous aurons $\chi(V) =$ (nombre de triangles) - (nombre d'arètes) + (nombre de sommets). Ainsi, $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T^2) = 0$ (voir figure ciaprès). Le lecteur pourra vérifier sur ces exemples que la caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation choisie.

Le *théorème de Gauss-Bonnet* lie la caractéristique d'Euler et la courbure scalaire par la formule

$$\int_V \mathrm{sc}_v(V,g)\mathrm{d}v = 4\pi\chi(V)$$



Caractéristique d'Euler

Ainsi dans le cas du tore, quelque soit la métrique, $\int_V \mathrm{sc}_v(T^2, g)\mathrm{d}v = 0$. Par des raisonnements classiques sur le signe de l'intégrande, nous pouvons montrer que $\mathrm{sc}_v(T^2, g) \equiv 0$ ou bien prend nécessairement les deux signes.

Cas général ?

En dimension supérieure, le problème a été résolu partiellement d'abord en employant la régularité d'hypersurfaces minimales par R. Schoen et S.T. Yau en 1979 pour les dimensions inférieures ou égales à 7.

En fait, le problème de savoir si une variété possède une métrique à courbure scalaire strictement positive est très difficile. En 1963, A. Lichnerowicz trouve une obstruction à l'existence de métrique à courbure scalaire strictement positive : un certain invariant numérique doit être nul.

Mais pour le tore cet invariant est nul, donc ceci ne permet pas d'exclure le fait que le tore puisse porter une métrique à courbure scalaire strictement positive. Il faut attendre 1980 et l'article de M. Gromov et B. Lawson pour montrer, pour toutes les dimensions n, que le tore ne peut avoir une métrique à courbure scalaire strictement positive. En adaptant astucieusement les méthodes de Lichnerowiscz, ils montrent que des variétés, dites agrandissables, ne peuvent porter de métrique à courbure scalaire strictement positive (ce sera le cas des tores). Ceci permet en particulier de montrer qu'une variété compacte sans bord (V, g_0) de courbure sectionnelle négative ou nulle ne peut porter de métrique g à courbure scalaire positive ou nulle.

Quelques définitions

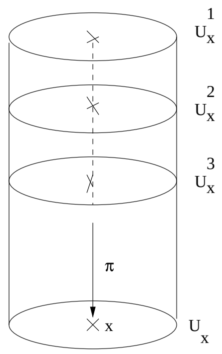
Pour pouvoir donner la définition « exacte » des variétés agrandissables, nous devons introduire des termes mathématiques inconnus des non-initiés, par exemple : orientable, revêtement (riemannien), degré. Nous laissons à l'intuition la notion d'orientabilité.

Voyons donc ce qu'est le degré d'une application et un revêtement d'une variété.

Soit une application $f : V^n \to S^n$, le *degré* de cette application est l'entier $n_y = \sum_{y=f(x)} \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = 1$ si $\mathrm{d}f_x : T_xV \to T_yS^n$ est de déterminant positif, -1 sinon. Remarquons que n_y ne dépend pas de y (n_y est localement constante et continue) et que s'il existe y n'ayant pas d'antécédant alors degré$f = 0$.

Un *revêtement fini* de cardinal p de V est une variété $\tilde{V}$ muni d'une projection $\pi : \tilde{V} \to V$ telle que, quelque soit x dans V, il existe U_x un voisinage de x dans V tel que $\pi^{-1}(U_x) = \coprod_{i=1}^{p} U_x^i$ où $\pi : U_x^i \to U_x$ est un homéomorphisme (voir figure ci-dessous). Nous dirons que ce revêtement est *riemannien* si nous pouvons munir $\tilde{V}$ d'une métrique compatible avec celle de V par la projection π.

Par exemple, $S^1 \to S^1 : z \mapsto z^2$ est un revêtement fini de cardinal 2, comme chacun peut s'en persuader.



Revêtement fini à 3 feuilles

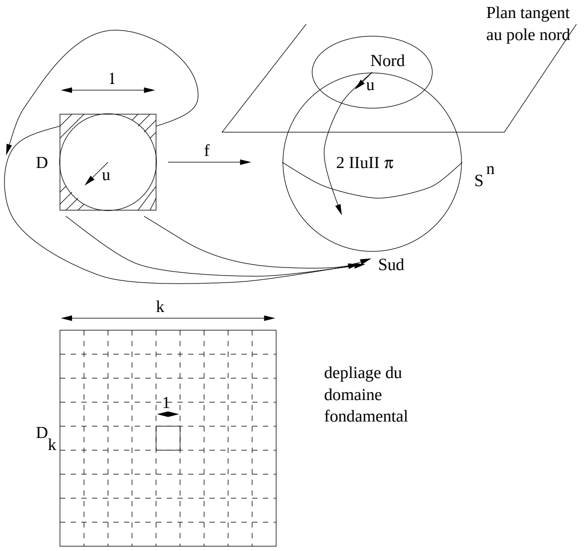
Voilà maintenant la définition à laquelle nous voulions parvenir. Nous dirons qu'une variété V compacte riemannienne orientable de dimension n est *agrandissable* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un revêtement riemannien fini $\tilde{V}_\varepsilon$ et une application $f : \tilde{V}_\varepsilon \to S^n$ de degré non nul et ε-contractante (i.e. $\forall v \in V_\varepsilon,\ \forall x \in T_vV_\varepsilon,\ \|\mathrm{d}f_v(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$).

Il est important de noter que cette propriété de la variété ne dépend pas de la métrique qu'elle porte.

Retour au cas du tore

Nous allons maintenant montrer que le tore est une variété agrandissable, ce qui permettra d'affirmer que pour toute dimension n, ce tore ne peut porter de métrique à courbure scalaire strictement positive.

Soit le tore $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Considérons un domaine fondamental D de T^n, par exemple le pavé $[-1/2, 1/2]^n$ et construisons une application $f : D \to S^n$ α-contractante de degré 1 en « enveloppant » la sphère par le domaine D :



Construction

Considérons ensuite un revêtement fini de T^n de la forme $\tilde{T}^n_k = \mathbf{R}^n/(k\mathbf{Z})^n$ de cardinal k^n. Un domaine fondamental D_k de $\tilde{T}^n_k$ est par exemple $[-k/2, k/2]^n$. En fait D_k peut être vu comme l'image de D par une homothétie de rapport k. Ainsi l'application $\phi_k : D_k \to S^n$ définie par $\phi_k(x) = f(x/k)$ est α/k-contractante de degré 1. Nous venons de montrer que le tore est agrandissable.

Conclusion

M. Gromov a donné dans un article récent une nouvelle interprétation de la notion d'agrandissabilité. Il associe à chaque variété riemanienne un réel positif, éventuellement infini, appelé K-Aire. Une variété agrandissable a, dans ce cas, une K-Aire infinie. De plus, le fait d'être de K-Aire infinie est indépendant de la métrique initiale portée par la variété. Le théorème, disant que les variétés agrandissables ne peuvent porter de métrique à courbure scalaire strictement positive, a ainsi une expression plus quantitative :

$$\mathrm{sc}(V,g) > \varepsilon^2 \Rightarrow K\text{-Aire}(V,g) \leq k_n/\varepsilon^2$$

où k_n est une constante qui ne dépend que de la dimension de la variété V.

Il s'agit maintenant d'étudier ce nouvel objet.

Pour en savoir plus...

[B$_1$] Marcel Berger, *Rencontre avec un géomètre*, Gazette des mathématiciens **76** (1998), 25–45.

[B$_2$] Marcel Berger, *Rencontre avec un géomètre*, Gazette des mathématiciens **77** (1998), 29–53.

[BB] Lionel Bérard-Bergery, *La coubure scalaire des variétés riemanniennes*, Séminaire Bourbaki, 32ème année, 1979–1980, exposé 556.

[dC$_1$] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[dC$_2$] Manfredo P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhaüser, 1992.

[GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, et Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 1987.

[GL] Mickael Gromov et H. Blaine Lawson, Jr., *Spin and Scalar Curvature in Presence of a Fundamuntal Group*, Annals of Mathematics **111** (1980), 209–230.

[LM] H. Blaine Lawson, Jr. et Marie-Louise Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.