Petits problèmes

Nous vous proposons ici quelques problèmes que nous avons rencontrés, et pour lesquels, en général, nous n'avons pas de résultat satisfaisant. Vous pouvez nous soumettre vos résultats à l'adresse du journal : `hubris@rip.ens-cachan.fr`, afin que nous les publiions dans les numéros suivants.

Le problème des timbres (bis)

On considère un ensemble de timbres, dont les valeurs se situent dans un ensemble de k entiers premiers entre eux, et dont le nombre est illimité pour chaque valeur. On peut alors montrer qu'à partir d'une certain entier, toutes les valeurs sont réalisables. Le problème est de le montrer, mais surtout d'exprimer l'entier minimal à partir duquel toutes les valeurs sont réalisables.

Par exemple, si on a un ensemble infini de timbres de trois francs et un ensemble infini de timbres de cinq francs, alors on peut réaliser toutes les valeurs à partir de huit francs. Mais sept francs n'est pas réalisable.

Nous allons montrer que, si A_m est le nombre de solutions entières positives de l'équation diophantienne $px + qy = m$, alors A_m est supérieur ou égal à un dès que m est supérieur ou égal $r = (p-1)(q-1)$. Nous montrerons également que la valeur $r - 1$ n'est pas réalisable, ce qui répondra complètement au problème.

Pour montrer ces résultats, nous allons utiliser la théorie des séries génératrices, et en particulier le fait que deux séries formelles sont égales si, et seulement si, tous les termes de la suite la définissant sont égaux.

Posons tout d'abord

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= \frac{(1-X)(1-X^{pq})}{(1-X^p)(1-X^q)}\\ &= \frac{1+X^p+\cdots+X^{p(q-1)}}{1+X+\cdots+X^{q-1}},\end{aligned}$$

et montrons que Φ est en fait un polynôme : pour le voir, nous utilisons la décomposition de la fraction rationnelle Φ en éléments simples :

$$\begin{aligned}\Phi(X) = E(X) &+ \frac{a}{(1-X)^2} + \frac{b}{1-X}\\ &+ \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\alpha_i}{\zeta_p^i - X} + \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j}{\zeta_q^j - X}.\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $(1-X)^2$, puis en prenant $X = 1$, on vérifie que a est nul. De la même façon, b est nul, ainsi que les α_i et les β_j, car p et q sont premiers entre eux, et les racines de l'unité sont toutes différentes. Il en résulte que Φ est un polynôme. Son degré vaut $(p-1)(q-1)$. On note Φ_l le coefficient du terme X^l de Φ.

On a alors formellement

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-X^p)(1-X^q)} &= \left(\sum_{k\geqslant 0} X^{kp}\right)\left(\sum_{l\geqslant 0} X^{lq}\right)\\ &= \sum_{k,l\geqslant 0} X^{kp+lq}\\ &= \sum_{m\geqslant 0} A_m X^m.\end{aligned}$$

De même, on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{(1-X)(1-X^{pq})} = \sum_{m\geqslant 0} B_m X^m$$

où B_m représente le nombre de solutions de l'équation $x + pqy = m$. Cette équation est plus simple que la première, et le nombre de ses solutions entières positives est facilement calculable : on a en effet

$$B_m = \left\lfloor \frac{m}{pq} \right\rfloor + 1$$

puisque c'est le nombre de valeurs que peut prendre y pour que pqy reste inférieur à m. On vérifie alors en particulier que $B_{m+pq} = B_m + 1$.

Par définition de A_m, B_m et Φ, on a

$$\begin{aligned}\sum_{m\geqslant 0} A_m X^m &= \left(\sum_{l\geqslant 0} \Phi_l X^l\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} B_k X^k\right)\\ &= \sum_{m\geqslant 0}\left(\sum_{l\geqslant 0} \Phi_l B_{m-l}\right) X^m.\end{aligned}$$

On en déduit, au vu de la remarque initiale, que

$$A_m = \sum_{l=0}^{m} \Phi_l B_{m-l}.$$

Alors,

- on a l'égalité

$$\begin{aligned}A_{m+pq} &= \sum_{i=0}^{m+pq} \Phi_i (B_{m-i} + 1)\\ &= A_m + \sum_{i=0}^{m+pq} \Phi_i.\end{aligned}$$

Donc, comme $m+pq$ est supérieur au degré de Φ, on en déduit $A_{m+pq} = A_m + \Phi(1) = A_m + 1$.
- si $m < pq$, on a $B_m = 1$, et $A_m = \sum_{k=1}^{s} \Phi_k$, où s est le plus petit de m et du degré de Φ, *i.e.*, $(p-1)(q-1)$. Donc, si m est compris entre r et $pq-1$, on a $A_m = \Phi(1) = 1$.

Prenons maintenant m strictement inférieur à r. Supposons que le problème ait deux solutions (s,t) et (s',t') distinctes. Alors dans ce cas,

$$(s-s')p = (t-t')q$$

et p divisera $t-t'$. En particulier, p sera inférieur à t, et $m = sp+tq$ sera supérieur à pq, ce qui est exclu. Donc, si m est strictement inférieur à r, A_m est soit nul, soit égal à 1. Par ailleurs, toujours pour ces choix de m, on a $A_m = \sum_{k=0}^{m} \Phi_k$, donc $\Phi_i = A_i - A_{i-1}$. Donc, pour tout i, $\Phi_i \in \{-1,0,1\}$. De plus, si $\Phi_i = \Phi_{i+1}$, alors ils sont nuls, car sinon A_{i+1} sera supérieur ou égal à deux. Enfin, comme Φ_r vaut 1 et A_r également, on a $A_{r-1} = 0$.

Nous venons de montrer que r est le plus petit entier à partir duquel tous les entiers sont « accessibles ».

Ne nous arrêtons pas en si bon chemin, et montrons que la moitié des entiers strictement inférieurs à r sont accessibles. On vérifie que :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{r} A_m &= (r+1)\Phi_0 + r\Phi_1 + \cdots + 2\Phi_{r-1} + \Phi_r \\ &= \sum_{m=0}^{r} (r+1-i)\Phi_i \\ &= (r+1)\Phi(1) - \Phi'(1) \\ &= (r+1) + \Phi'(1).\end{aligned}$$

Or la dérivée logarithmique de Φ donne

$$\frac{\Phi'(X)}{\Phi(X)} = -\frac{1+2X+\cdots+(q-1)X^{q-2}}{1+X+\cdots+X^{q-1}} + \frac{pX^{p-1}+2pX^{2p-1}+\cdots+(q-1)pX^{(q-1)p-1}}{1+X^p+\cdots+X^{p(q-1)}}.$$

D'où $\Phi'(1) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$. Comme A_m est inférieur ou égal à 1 si $m < pq$, on obtient

$$\sum_{m=0}^{r} A_m = \frac{r}{2} + 1$$

et comme A_r vaut 1, on obtient le résultat annoncé.

N.M.