Livres

Word processing and group theory,
D. Epstein et al.,
Jones and Bartlet publishers, 1992

Les descriptions usuelles des groupes ne sont pas toujours aussi utilies qu'on pourrait le vouloir ; en particulier, elles ne sont pas toujours algoritihmiques. Par exemple, quand un groupe est donné par générateurs et relations, il n'existe pas d'algorithme permettant de dire si deux mots correspondent au meme élément.

Néanmoins, les groupes que l'on rencontre proviennent souvent de situations géométriques, ce peuvent etre par exemple des groupes fondamentaux de variétés riemanniennes. On peut donc espérer que cette origine géométrique entraine des propriétés supplémentaires sur le groupe, qui permettent de mieux le visualiser et de mieux calculer avec.

Rappelons ce qu'est un *graphe de Cayley.* Si G est un groupe et S un système (fini) de générateurs on considère le graphe orienté dont les sommets sont les éléments du groupe et dont les arrêtes sont les $g \longrightarrow sg$ pour tout $s \in S$ et $g \in G$. On en fait un espace métrique en décrétant que les arrêtes sont de longueur un. Si G provient d'une situation géométrique, par exemple, si c'est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte, la géométrie du graphe de Cayley peut être vue comme un modèle combinatoire de cette situation.

Il existe alors (souvent) un automate fini qui nous dit si deux mots sur S correspondent au même élément de G (je simplifie un peu). On parle alors de *groupe automatique.*

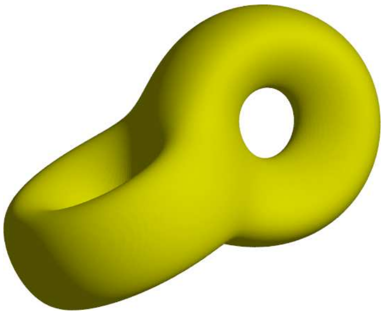
Comme exemples, on peut citer les groupes finis, les groupes abéliens de type fini, les groupes de tresses, beaucoup de groupes hyperboliques et beaucoup de groupes de Coxeter.

Ce livre présenta les fondations du sujet, par ses initiateurs. Pour une autre présentation du sujet, plus succinte, ainsi qu'une liste d'applications concrètes (en image de synthèse, par exemple), on peut consulter *Automatic groups, a guided tour,* L'enseignement mathématique 32 (1992) p. 291–313. **V.Z.**

Algorithms and computer methods for 3-manifolds,
A.T. Fomenko and S.V. Matveev, Kluwer, 1997

Contrairement à ce que laisse suggérer le titre, ce livre ne parle pas du tout d'informatique (ce sera le volume suivant), mais uniquement de la géométrie des variétés de dimensions deux et trois. Les dessins de Fomenko soulignent la nature profondément visuelle du sujet.

Le livre commence par l'étude des surfaces : les auteurs démontrent par exemple avec force dessins que toute surface compacte orientée est un « tore » à plusieurs trous.



On peut ensuite s'intéresser au groupe des homéomorphismes d'une surface, ou plutôt, pour obtenir un objet de taille plus raisonnable, les homéomorphismes à déformation près. On peut voir que ce groupe en engendré par les *torsions de Dehn*, homéomorrphismes qui consistent à découper la surface le long d'une courbe fermée simple, faire un tour complet et recoller. (On connait d'ailleurs une présentation *finie* de ce groupe).

Une manière de construire une variété de genre trois est la suivante : prendre deux tores solides (de même genre) et les recoller le long d'un homéomorphisme de leur bord. On peut montrer que toute variété de dimension trois peut s'obtenir de cette manière : on parle de décomposition de *Heegaard.* Décrire une telle décomposition revient à décrire l'homéomorphisme de la surface utilisé pour le recollement (modulo déformation).

On peut se demander si deux décompositions de Heegaard correspondent à des variétés isomorphes. On ne dispose que d'une réponse partielle : en genre deux (c'est le genre du bord des tores solides), on sait reconnaître la sphère de dimension trois.

On peut montrer l'existence et l'unicité de la décomposition en somme connexe de variétés « premières » (c'est la même définition que pour les nombres premiers : non décomposables en somme connexe de variétés non triviales, *i.e.*, non homéomorphes à la sphère)

Après un chapitre sur la théorie des nœuds et leurs invariants, le livre démontre que toute variété de dimension trois peut s'obtenir à partir de la sphère $\mathbf{S}^3$ par *chirurgie* le long d'un lien, *i.e.*, en découpant un voisinage tubulaire d'un lien (plusieurs nœud, éventuellement emmêlés) et en le recollant après avoir fait subir un homéomorphisme à son bord. On sait dire quaud deux liens donnent la même variété (quand ils sont reliés par des *mouvements de Kirby*). Dans certains cas, les invariants de nœuds permettent de définir des invariants de variétés de dimension trois.

Le livre s'achève sur l'étude de certaines classes de variétés de dimension trois, comme les variétés de Seifert. **V.Z.**