ἡ ὕβρις

Continuum mathématique des ENS

Il leur semblait que la planète, emportée au sein de la nuit qu'elle labourait de toute la crête des arbres, chavirât, basculât en arrière en suivant la direction obstinée de cette allée, plus irréelle que la ligne des pôles, plus foisonnante que le rayon du soleil indiqué par la craie au tableau noir. Et, comme hissés d'un prodigieux coup de reins au toit de la planète lisse, au faîte nocturne du monde, ils sentaient avec un divin frisson de froid le soleil crouler sous eux à une immense profondeur, et l'allée délestée leur révéler à chaque seconde les chemins secrets et jamais parcourus de la vraie nuit, dont elle escaladait visiblement l'entière épaisseur.

Julien Gracq, Au château d'Argol, L'allée

Éditorial

Et voici le deuxième numéro ! Cette revue au titre toujours difficile à prononcer innove en promouvant une nouvelle façon de parler de Mathématiques, où la gourmandise tient une grande place. Le plaisir d'écrire et de contempler des objets mathématiques devient communicatif. Puisse ce style se développer, éventuellement sous d'autres formes, écrites ou verbales.

Ce numéro nous invite à un petit voyage dans un monde hyperbolique, puis dans l'analyse complexe. De bonnes lectures avant les vacances, peut-être rencontrez-vous ces objets cet été : à l'occasion d'une nuit à la belle étoile, la voute céleste vous rappelera peut-être la compactification de $\mathbb{C}$, comme à la Roger Penrose (cf théorie des twisteurs). Ou peut-être, plus simplement, en parcourant la France par le train, vous réaliserez que les géodésiques du réseau SNCF tiennent d'avantage du plan hyperbolique que du plan euclidien.

Frédéric Hélein
Professeur des Universités,
ENS Cachan

Sommaire

Le comité de rédaction attend vos articles

Géométrie Hyperbolique Plane

Gabriel Dos Reis
dosreis@dptmaths.ens-cachan.fr

« Au lieu de parler de points, de droites et de plans, on devrait pouvoir à tout moment parler de tables, de chaises et chopes de bière. » – David HILBERT

Pour une tasse de cappuccino de plus...

Un condisciple de Taupe que j'ai retrouvé il n'y a pas longtemps autour d'une tasse de cappuccino m'a demandé ce que je faisais actuellement à l'ENS de Cachan. Flatté par l'intérêt que cet ami porte à mon cursus scolaire, je lui répondis : « de la Géométrie. » Il s'étonna d'apprendre qu'on puisse encore s'intéresser à cette vieille discipline qui n'a probablement plus rien à cacher. Devant cet étonnement je décidai de lui expliquer qu'il y avait beaucoup de choses à comprendre dans ce domaine. Vu mon enthousiasme pour la Géométrie qu'il jugea exagéré il risqua la question « Mais qu'est-ce que la Géométrie ? » Je saisis la perche : « La Géométrie est l'étude des propriétés d'un G-espace (Ω, G), où G est un groupe opérant sur un ensemble Ω. » Je ne peux décrire ici l'expression du visage de mon ami. Je fus d'abord surpris, car je savais qu'il comprenait parfaitement le sens de ma phrase. Il m'expliqua qu'il ne voyait pas de rapport avec la bonne vieille Géométrie qu'on nous a enseignée jusqu'en Taupe. Il objecta que ma définition est probablement motivée par une abstraction stérile, qui aura sûrement comme conséquence de détruire mon imagination si ce n'est déjà le cas. J'ai alors compris qu'il fallait commander d'autres tasses de cappuccino... Cinq heures plus tard mon ami me quitta, émerveillé, sur ces mots : « Ah... je n'ai pas perdu ma journée. J'ai appris qu'il existe beaucoup de géométries, entre autre ce que c'est que la géométrie hyperbolique plane. Je peux aller me coucher maintenant en toute tranquilité : je ne mourrai pas idiot. » J'ai décidé de partager cette journée dans les colonnes de Hubris.

Le cinquième postulat

Aux alentours de 300 avant J.-C. un certain EUCLIDE entreprit de compiler la science mathématique grecque de son temps (augmentée de ses propres découvertes). Cette compilation étaient divisée en livres appelés « Éléments ». Ces « Éléments » constituent le premier système formel mathématique connu. EUCLIDE faisait une distinctoin nette entre ce qu'il appélait « axiomes » ou postulats, suivis de définitions et les « théorèmes » qui étaient des assertions déduites des axiomes et définitions suivant une logique bien déterminée.

Le livre 13 des « Éléments » contient l'essentiel de la géométrie grecque. Après y avoir défini des notions géométriques comme le point, la droite et le plan EUCLIDE exposa cinq postulats qui devaient fonder sa géométrie. Si les quatre premiers axiomes ont été acceptés sans difficulté, le cinquième a été la source des principales critiques du système d'EUCLIDE. Il s'énonçait en ces termes (modernes) :

> Si une droite rencontre deux droites et détermine avec elles des angles intérieurs de somme strictement plus petite que 180°alors ces droites intersectent.

Cet axiome est équivalent à cet autre (fameux) postulat dit de parallélisme :

> Par un point pris en déhors d'une droite il passe une et une seule droite n'intersectant pas cette dernière.

Durant les 20 siècles qui suivèrent les Éléments, des générations de mathématiciens partagèrent la conviction que le cinquième postulat d'EUCLIDE était déductible des quatres premiers ; et ceci d'autant plus qu'EUCLIDE a développé une majeure partie de sa géométrie sans faire appel à ce fameux postulat (voir le paragraphe intitulé « La Géométrie Absolue »). Leurs efforts acharnés, notamment ceux de SACCHERI, furent vains.

Il fallut attendre le XIX-ième siècle pour que Carl Friedrich GAUSS, sans doute le plus grand mathématicien de son temps, convaincu de la justesse d'EUCLIDE établît qu'une négation du postulat de parallèlisme conduisait à une géométrie toute aussi cohérente que celle qu'on appelle désormais la Géométrie Euclidienne. Malheureusement GAUSS ne publia jamais ses résultats craignant « la clameur des Béotiens. » Indépendamment, deux de ses contemporains Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKY (1829) et János BOLYAI (1832) retrouvèrent ses résultats. Il est à noter que ces trois mathématiciens ont abouti à la même géométrie car ayant adopté cette forme particulière de la négation du postulat de parallélisme :

> Par tout point pris en déhors d'une droite il passe au moins deux droites ne l'intersectant pas.

Cette géométrie s'appelle de nos jours *Géométrie Hyperbolique* et le terme de *Géométrie non-euclidienne* est donné à toute géométrie dans laquelle le postulat de parallélisme est mis en défaut.

En 1868 Eugenio BELTRAMI mit définitivement un terme aux critiques du système d'EUCLIDE en construisant un modèle euclidien de la Géométrie Hyperbolique : il en découle que si cette dernière contient une inconsistance il en est de même de la Géométrie Euclidienne. Ce qui laisse songeur les affirmations du philosophe KANT comme quoi la Géométrie Euclienne était la seule concevable par l'esprit humain. En 1871 Felix KLEIN interpréta le modèle de BELTRAMI en termes de Géométrie Projective. D'autres modèles furent construits tels le modèle conforme du disque unité, le modèle demi-plan supérieur de Poincaré, le modèle hyperboloide...

Une définition précise de ce qu'est une géométrie devint nécessaire. En 1872, au congrès des mathématiciens à Erlangen, F. KLEIN proposa (ce qui allait devenir le *programme d'Erlangen*) de définir la géométrie en termes d'actions de groupes. Ainsi un modèle de géométrie sera un G-espace Ω, une figure géométrique une partie de Ω et une propriété géométrique est un invariant de cette action. Deux modèles (Ω_1, G_1) et (Ω_2, G_2) de géométrie seront dits équivalents s'il existe une bijection $\Theta : \Omega_1 \to \Omega_2$ et un isomorphisme $\Phi : G_1 \to G_2$ vérifiant : $\Theta(g \cdot \omega) = \Phi(g) \cdot \Theta(\omega)$. Une géométrie est alors une classe d'équivalence de modèles de géométrie.

Dans le cadre de travail proposé par KLEIN, une géométrie est finalement un système d'axiomes et un modèle de cette géométrie est une théorie mathématique dans laquelle ces axiomes sont vérifiés. Cette approche est devenue traditionnelle et nous la suivrons : ainsi on énoncera les axiomes qui fondent la Géométrie Hyperbolique, quelques théorèmes puis on construira les modèles classiques de cette géométrie. La tentation de succomber aux charmes de la géométrie riemannienne a été grande. Nous croyons y avoir résisté, ceci afin de garder un niveau élémentaire à l'exposé.

Les axiomes de Playfair

La Géométrie Absolue

Une partie importante de la Géométrie Euclidienne, comme cela a été dit plus haut, peut être développée sans l'intervention du postulat du parallélisme. Cette sous-géométrie se retrouve naturellement en Géométrie Hyperbolique. Nous avons décidé de l'exposer, brièvement, dans cette section afin que l'on puisse distinguer clairement les résultats qui découlent du postulat du parallélisme (ou de sa négation) de ceux qui lui sont indépendants. On travaillera dans toute cette section avec un ensemble $\mathscr{A}$ appelé *plan absolu* ou *plan* tout court dont les éléments sont dénommés des *points*.

Axiome 1

> Il existe des sous-ensembles du plan appelés *droites* tels que deux points distincts appartiennent à une unique droite.

Si A et B sont deux points distincts du plan, on notera (AB) la droite qu'ils déterminent ; ainsi la droite (BA) est la même chose que la droite (AB). Il résulte de cet axiome que l'intersection, lorsqu'elle n'est pas vide, de deux droites distinctes est un singleton. L'axiome suivant permet de mesurer la « distance » entre deux points.

Axiome 2

> Tout couple (A, B) de points déterminent un unique nombre réel positif $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$ appelé *distance entre A et B*, nul si et seulement si $A = B$.

Axiome 3

> À toute droite (D) du plan correspond au moins une bijection $\Gamma : (D) \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}(A, B) = |\Gamma(A) - \Gamma(B)|$.

Une telle bijection Γ se nomme une application coordonnée sur la droite D. On dira qu'un réel b est compris entre deux réels a et b si l'une au moins des phrases

- $a < b < c$,
- $c < b < a$

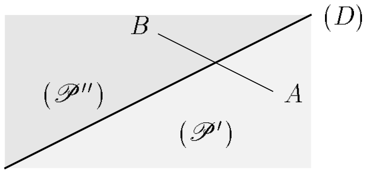
est vraie ; ce que l'on notera $\langle abc\rangle$ ou $\langle cba\rangle$. Si A, B et C sont trois points colinéaires, on dira que B est situé entre A et C (ce que l'on notera $\langle ABC\rangle$ ou $\langle CBA\rangle$ suivant le cas) si pour une application coordonnée, donc pour toute application coordonnée Γ, le réel $\Gamma(B)$ est compris entre $\Gamma(A)$ et $\Gamma(C)$.

Soient deux points A et B du plan. On appelle segment ouvert d'extrémités A et B le sous-ensemble, noté $]AB[$, constitué des points X qui vérifient $\langle AXB\rangle$. Le segment fermé $[AB]$ d'extrémités A

et B est l'ensemble $]AB[\cup\{A,B\}$. Les segments semi-ouverts définis par A et B sont : $[AB[=\{A\}\cup]AB[$ et $]AB]=]AB[\cup\{B\}$. La demi-droite ouverte $]AB)$ (resp. fermée $[AB)$) d'origine A et passant par B est définie comme étant l'ensemble des points X tels que $\langle AXB\rangle$ ou $X=B$ ou $\langle ABX\rangle$ (resp. $X=A$ ou $\langle AXB\rangle$ ou $X=B$ ou $\langle ABX\rangle$). Ces définitions étant posées, on montre qu'il existe un unique point de droite (AB) à égale distance des points A et B et situé entre ces deux points : on l'appelle le milieu du segment $[AB]$. Une partie du plan est dite convexe si chaque fois qu'elle contient deux points, elle contient le segment qu'ils définissent. Il est clair que le plan absolu, l'ensemble vide, les points, les droites, les demi-droites et les segments sont des parties convexes du plan.

Axiome 4

> Toute droite (D) du plan détermine exactement deux parties $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P}'')$ non-vides, convexes telles que :
>
> 1. (D), $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P}'')$ forment une partition du plan,
> 2. si A est un point de $(\mathscr{P}')$ et B un point de $(\mathscr{P}'')$ alors le segment $]AB[$ coupe la droite (D).



Les parties $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P}'')$ s'appellent les côtés opposés ou les demi-plans ouverts opposés de la droite (D). Les parties $(D)\cup\mathscr{P}'$ et $(D)\cup\mathscr{P}''$ se nomment les demi-plans fermés opposés de (D). On dira que deux points A et B sont séparés par la droite (D) s'ils se trouvent dans les côtés opposés de (D). Un angle est la réunion de deux demi-droites fermées non-colinéaires ayant une origine commune. L'origine commune s'appelle le sommet de l'angle et les demi-droites fermées ses cotés. L'angle formé par deux demi-droites fermées $[BA)$ et $[BC)$ est noté $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{CBA}$. L'intérieur de cet angle est l'ensemble des points se trouvant du même côte que A de la droite (BC) et du même côté que (C) de la droite (AB). Il est clair que cet ensemble est convexe. Deux angles sont dits opposés si les côtés de l'un sont les côtés opposés de l'autre. Si les demi-droites $[BA)$ et $[BA')$ (resp. $[BC)$ et $[BC')$) sont opposées et que les trois points A, B et C ne sont pas colinéaires alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'BC'}$ (resp. $\widehat{A'BC}$ et $\widehat{ABC'}$) sont opposés. Ces quatre angles s'appellent les angles d'intersection des deux droites (BA) et (BC). Deux angles sont dits adjacents s'ils admettent un côté commun et leurs intérieurs ne se rencontrent pas. On dira qu'une demi-droite (D_1) est située entre les demi-droites (D_2) et (D_3) si ces trois demi-droites ont la même origine, les demi-droites fermées de (D_2) et (D_3) forment un angle, et la demi-droite ouverte de (D_1) est intérieure à l'angle de (D_2) et (D_3). Il vient de cette définition qu'un point P est intérieur à l'angle $\widehat{ABC}$ si et seulement si la demi-droite $]BP)$ est située entre $]BA)$ et $]BC)$. Il est clair aussi que si les points A, B et C ne sont pas colinéaires alors le segment ouvert $]AC[$ est intérieur à l'angle $\widehat{ABC}$.

Axiome 5

> À tout angle $\widehat{ABC}$ correspond un unique réel compris entre 0 et 180 appelé sa mesure en degré.

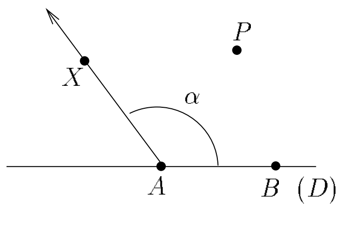
La mesure en degré d'un angle $\widehat{ABC}$ sera noté $\widehat{ABC}^\circ$. Un angle dont la mesure en degré vaut α sera appelé un angle de degré α. L'axiome 5 permet essentiellement de mesurer les angles. Afin d'effectuer des calculs avec ces mesures il faut au moins une règle supplémentaire :

Axiome 6

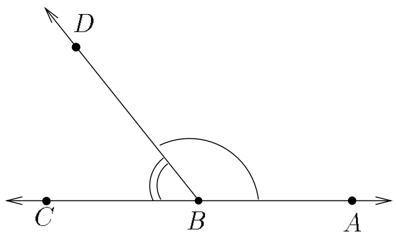
> Soit $]BD)$ une demi-droite intérieure à l'angle $\widehat{ABC}$ alors l'égalité suivante est vraie : $\widehat{ABD}^\circ+\widehat{DBC}^\circ=\widehat{ABC}^\circ$.

Axiome 7

> Si la demi-droite $[AB)$ est contenue dans le bord (D) du demi-plan ouvert $(\mathscr{P}((D),P))$ alors il existe au moins une bijection, appelée système de coordonnée angulaire, entre l'ensemble des demi-droites ouvertes $[AX)$ de $(\mathscr{P}((D),P))$ d'origine A et l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 180, telle que si α est l'image de $[AX)$ alors $\widehat{BAX}^\circ=\alpha$.



Un angle est dit aigu, droit, obtus si sa mesure en degré est respectivement plus petite que, égale à, plus grande que $90°$. Deux angles sont dits complémentaires (resp. supplémentaires) si leur somme vaut $90°$ (resp. $190°$). On montre que si les demi-droites opposées $]BA)$ et $]BC)$ ne sont pas colinéaires à la demi-droite $]BD)$ alors les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{DBC}$ sont supplementaires.



Il est clair que si les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{DBC}$ sont adjacents et supplémentaires alors les demi-droites $]BA)$ et $]BC)$ sont opposées. On montre également que deux angles opposés ont la même mesure.

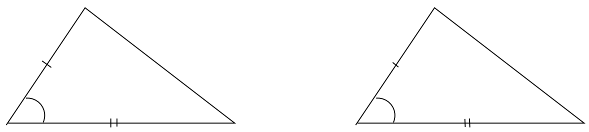
On dit que les demi-droites $[BD)$ et $]BD)$ bissectent l'angle $\widehat{ABC}$ si $]BD)$ lui est intérieure et $\widehat{DAB}°= \widehat{DAC}°$. Une droite est appelée une bissectrice d'un angle si elle est le support d'une demi-droite bissectrice. On montre que tout angle possède une unique bissectrice.

Deux droites sécantes sont dites perpendiculaires si l'un de leurs angles d'intersection est droit. Il s'en suit alors les autres angels de l'intersection sont droits. D'autre part, il est un fait qu'une droite admet une unique perpendiculaire en un point donné.

Étant donnés trois points A, B et C non alignés, on appelle triangle ABC la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Les points A, B, C (resp. les segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, resp. les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$) s'appellent les sommets (resp. les côtés, resp. les angles) du triangle ABC. Deux segments (resp. deux angles) sont dits congruents s'ils ont même longueur (resp. mesure d'angle). Il est clair que la relation de congruence est d'équivalence. Une correspondance entre deux triangles ABC et $A'B'C'$ est une bijection entre les sommets (resp. les angles, resp. les côtés) des traingles ABC et $A'B'C'$ telle que les sommets des angles correspondent aux sommets des angles images. Une congruence entre deux triangles est une correspondance entre ces triangles telle que les côtés (resp. angles) correspondants soient congruents.

Axiome 8

> Une correspondance entre deux triangles telle que deux côtés et l'angle délimité par ces côtés soient congruents à leurs correspondants est une congruence.



Cet axiome permet d´établir que deux triangles sont congruents à partir de propriétés de congruence angle–côté–angle, côté–côté–côté, hypthénuse–angle, hypothénuse–côté. Les congruences forment un groupe, pour la loi de composition des applications, appelé groupe d'isométries.

En Géométrie Absolue, où les droites sont d'étendue illimitée, le phénomène curieux suivant se produit : par un point pris en déhors d'une droite il passe *au moins* une droite ne la apprencontrant pas. Combien y a-t-il de telles droites ? La vérité est que les axiomes de la Géométrie Absolue ne sont pas assez puissants pour répondre à cette question. Si l'on répond, arbitrairement comme Euclide l'a fait, qu'il en existe *une unique* alors la géométrie devient euclidienne. Si en revanche on s'autorise plus d'une telle droite alors la géométrie devient hyperbolique.

Axiome hyperbolique

> Par un point P en déhors d'une droite (D) il passe au moins deux droites ne rencontrant pas (D).

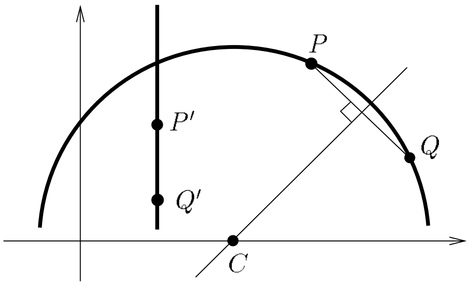
Dans le cadre de la géométrie hyperbolique, cet axiome est équivalent à l'assertion suivante :

> Par un point P en déhors d'une droite (D) il passe une infinité de droites ne rencontrant pas (D).

Avec des yeux hyperboliques...

... on voit des droites circulaires,

Notre premier modèle du plan hyperbolique sera l'ensemble $\mathcal{U}$ des points (identifés avec leurs affixes) d'ordonnée strictement positive. Nous décidons d'appeler *h-droite* du plan $\mathcal{U}$, son intersection avec toute droite euclidienne verticale ainsi que celle avec tout cercle euclidien centré sur l'axe des réels.

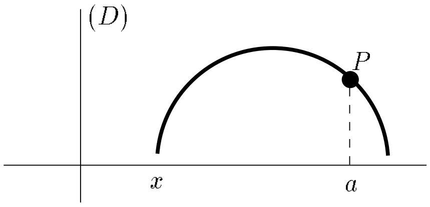


L'axiome 1 est-il vérifié ? Considérons deux points distincts P et Q du plan $\mathcal{U}$ et désignons pas (D) la droite euclidienne qu'ils définissent. Si (D) est verticale alors il est clair que son intersection avec le plan $\mathcal{U}$ est l'unique h-droite qui contient les points P et Q. Dans le cas contraire, une h-droite qui contiendrait ces deux points sera nécessairement un demi-cercle euclidien centré sur l'axe des réels. En existe-t-il ? Oui, car la droite (D) n'étant pas verticale la médiatrice (au sens euclidien) du segment $[PQ]$ rencontre l'axe des abscisses en un point C et apparemment l'intersection du cercle de centre C et de rayon $CP = CQ$ est une h-droite et c'est la seule qui contient les points P et Q.

L'existence d'une distance sur le plan $\mathcal{U}$ vérifiant les axiomes 2 et 3 est reportée à plus tard. Qu'en est-il de l'axiome 4 ? Rappelons qu'un h-segment est un arc de cercle euclidien dont le support définit une h-droite. Averti de ce fait, il n'est pas dur de remarquer qu'une h-droite découpe toujours le plan hyperbolique en deux parties h-convexes. D'autre part une h-droite reliant deux points situés des côtés opposés d'une h-droite rencontre toujours cette dernière.

La notion d'angle se définit comme nous l'avons signalée au paragraphe consacré à la Géométrie Absolue. La mesure de l'angle entre deux h-demi-droites est celle (euclidienne) de l'angle défini par leurs tangentes (euclidiennes). Il découle de cette définition que les axiomes 5, 6 et 7 sont satisfaits. L'axiome 8 fait intervenir la notion de distance que nous n'avons toujours pas encore définie. Nous reportons donc son examen à plus tard. Et l'axiome 9 qui a motivé toute cette histoire ?

Considérons une h-droite (D) et un point P de $\mathcal{U}$ qui n'est pas situé sur (D). Nous savons depuis [DR] que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit de manière transitive sur les h-droites. On peut donc supposer, sans restreindre la portée du raisonnement, que la h-droite (D) est réalité l'axe des ordonnées et que le point $P = a + ib$ est d'abscisse stirctement positive. Alors pour tout x réel tel que $0 < x < a$, l'intersection du plan $\mathcal{U}$ et du cercle de centre $(a^2 - x^2 + b^2)/2(a - x)$ et de rayon $((a-x)^2+b^2)/2(a-x)$ est une h-droite passant par le point P et ne rencontrant pas la droite (D) : *notre modèle satisfait à l'axiome hyperbolique.* Avant d'affirmer que nous détenons un modèle euclidien du plan hyperbolique, il nous faut démontrer l'existence d'une distance compatible sur $\mathcal{U}$. C'est l'objet de la prochaine section.



lorsqu'il n'y a pas de dilatation...

Nous nous sommes servi, dans le paragraphe précédent, de l'action transitive du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur le plan $\mathcal{U}$ pour vérifier l'axiome hyperbolique. Il serait commode si en réalité ce groupe était un groupe d'isométries de notre géométrie. Ainsi nous ramenons la recherche générale d'une métrique dans le plan $\mathcal{U}$ à celle, plus restreinte, de métrique invariante par le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Plus précisément nous cherchons une fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ telle que :

1. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) \geqslant 0$ pour tout $(P,Q) \in \mathcal{U}^2$ et $\mathrm{d}(P,Q) = 0$ ssi $P = Q$,
2. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(Q,P)$ pour tout $(P,Q) \in \mathcal{U}^2$,
3. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) \leqslant \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,R) + \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(R,Q)$ pour tout $(P,Q,R) \in \mathcal{U}^3$,
4. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,R)+\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(R,Q)$ chaque fois que $\langle PRQ\rangle$,
5. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(T(P),T(Q)) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q)$ pour tout $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $(P,Q) \in \mathcal{U}^2$,
6. si possible, on voudrait que la distance $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ soit continue.

Il est clair que si la fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ cherchée existe alors toute fonction qui lui est proportionnelle par un facteur strictement positif convient également. D'autre part grâce à l'action transitive de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur les droites du plan $\mathcal{U}$, la propriété d'invariance nous dit que la fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur la h-droite $(D) = \{y\mathrm{i}, y > 0\}$. On remarque que les homothéties h_λ de rapport λ strictement positifs conservent (D). L'invariance veut alors que pour deux points $P = \mathrm{i}p$ et $Q = \mathrm{i}q$ de la droite (D) la valeur $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q)$ ne dépende que du rapport p/q ou encore du nombre réel $\ln(p/q)$. Puisque la fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ est symétrique, le nombre

$\mathrm{d}(P,Q)$ ne dépend que de $|\ln(p/q)|$. En d'autres termes $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \phi(|\ln(p/q)|)$ pour une fonction ϕ donnée. En considérant l'additivité, on s'aperçoit que $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$. Enfin, comme nous souhaitions disposer d'une distance continue, il nous reste $\phi(x) = k \cdot x$ pour un nombre réel $k > 0$ donné. Nous prendrons $k = 1$. Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines... En effet presque toutes les conditions énoncés ci-haut sont évidentes à vérifier sauf l'inégalité triangulaire. Encore un petit effort et on y est.

On peut effectuer un calcul brutal et procéder à des majorations, minorations pour obtenir le résultat cherché. Nous procédons autrement. Nous allons chercher un élément de longueur $\mathrm{d}s$ qui permettrait de reconstituer la distance $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$. Plus précisément nous sommes à la recherche d'une 1-forme $\mathrm{d}s$ dans le plan telle que pout toute courbe $\mathcal{C}$ différentiable par morceaux, on ait :

$$l(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$$
$$\text{et} \quad l([PQ]) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) \quad \text{pour tout } P,Q \in \mathcal{U}$$

Considérons la différentielle $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$, alors pour toute transformation

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

on a :

$$T_*(\mathrm{d}z) = \frac{(ad-bc)\mathrm{d}z}{(cz+d)^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(cz+d)^2}.$$

D'autre part nous savons depuis [DR] que l'identité suivante a lieu :

$$\mathrm{Im}\, T(z) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2}.$$

Il s'en suit que la différentielle $|\mathrm{d}z| / \mathrm{Im}\, z$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-invariante. Ce sera notre élément de longueur $\mathrm{d}s$ cherché. En effet on remarque que pour deux points distincts $P = \mathrm{i}p$ et $Q = \mathrm{i}q$ de la h-droite (D), avec $p < q$:

$$l([PQ]) = \int_p^q \frac{\mathrm{d}y}{y} = \left|\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q).$$

Par invariance et transitivité cette égalité est vraie pour n'importe quel couple de points de $\mathcal{U}$. L'inégalité triangulaire n'est toujours pas démontrée... Mais en réalité elle découle de l'observation suivante :

$$\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \inf_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des courbes différentiables par morceaux qui relient le point P au point Q car si $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ est un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$ reliant P à Q, alors :

$$l(\mathcal{C}) = \int \frac{\sqrt{x'(t) + y'(t)}}{y(t)} \mathrm{d}t \geqslant \int \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Cette nouvelle expression de notre distance $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ montre que les axiomes 2 et 3 sont satisfaits en utilisant la transitivité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et en ramenant tout à la droite (D). Il nous reste à vérifier l'axiome 8. Nous profitons de l'occasion pour illustrer un fait caractéristique de la géométrie hyperbolique : la somme des angles d'un triangle hyperbolique ne fait pas π ! Pour cela il nous faut un deuxième modèle.

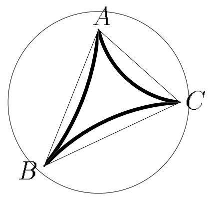
... on devient borné pour un défaut d'angle

Il est connu que la transformation

$$\Theta(z) = \mathrm{i}\frac{1-z}{1+z} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

envoie conformément le disque unité $\mathcal{D}$ sur le demi-plan supérieur de Poincaré. Il est donc possible de récupérer un autre modèle du plan hyperbolique par transport. Ainsi les h-droites dans le plan $\mathcal{D}$ sont les diamètres et arcs de cercles orthogonaux à $\partial\mathcal{D}$. Les mesures d'angles ne changent pas. Un avantage de ce modèle est qu'il est borné : on a la « sensation » de voir *tout ce qui s'y passe*. Qu'à cela ne tienne ! Car voici un phénomène tout à fait impossible dans le plan euclidien :

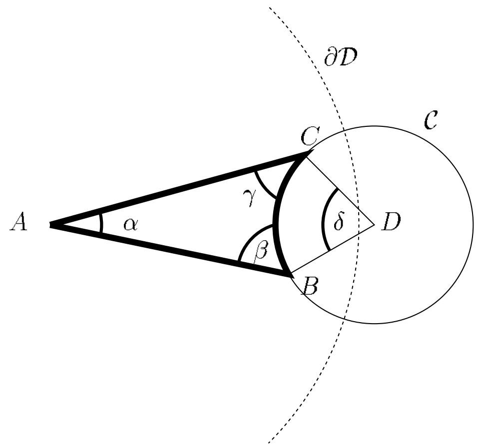
> Dans le plan hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est strictement plus petite que 180°.



En effet dans le plan $\mathcal{D}$ les h-côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ d'un h-triangle ABC sont contenus dans des demi-cercles orthogonaux au bord $\partial\mathcal{D}$ et il suffit de comparer les angles délimités aux angles du triangle euclidien de sommets A, B et C.

Il est légitime de se demander si la réciproque de ce fait est vrai, *i.e.* existe-t-il un triangle d'angles trois nombres réels α, β et γ positifs donnés à l'avance, et de somme strictemment plus petite que π ? La réponse est extraodinairement positive : tous les triangles solutions de ce problème sont *isométriques* entre eux. Voyons pourquoi.

Notons $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ le défaut d'angle. Soient un cercle $\mathcal{C}$ (euclidien) de centre D, deux points B et C du cercle $\mathcal{C}$ tels que les rayons $[DB]$ et $[DC]$ fassent un angle de mesure δ. Considérons les droites euclidiennes $\mathcal{L}_B$ et $\mathcal{L}_C$ passant par les points B et C et faisant des angles de mesures respectives β et γ avec l'arc de cercle de $\mathcal{C}$ de plus courte longueur délimité par B et C. Il découle de l'inégalité $\delta+\beta+\gamma = \pi-\alpha < \pi$ et d'un fameux théorème de la géométrie euclidienne plane – que le lecteur devine – que les droites $\mathcal{L}_B$ et $\mathcal{L}_C$ se coupent en un point A.



On obtient ainsi un quadriltère $ABDC$ d'angles intérieurs α, $\pi/2+\beta$, δ et $\pi/2+\gamma$. Quitte à considérer l'action d'une similitude directe – unique – on peut supposer que le cercle de centre A et orthogonal au cercle $\mathcal{C}$ est le bord du dique unité $\mathcal{D}$. Il n'y a pas de peine à observer que les points A, B et C sont *dans* le plan hyperbolique $\mathcal{D}$ et que le triangle hyperbolique ABC a des angles intérieurs de mesures α, β et γ. Il est clair – à travers le travail qui vient d'être fait – que le triangle ABC est unique à isométrie hyperbolique près.

Le lecteur attentif remarquera que l'axiome 8 découle de ce fait que nous venons de montrer.

L'opération des exprits du mal

Après cette courte introduction à la géométrie hyperbolique, nous invitons le lecteur à méditer Matthew Ryan :

> L'étude de la géométrie non-euclidienne n'apporte pas grand chose aux étudiants sinon fatigue, vanité, arrogance et imbécilité. L'espace « non-euclidien » n'est qu'une pseudo-invention de démons qui alimentent les phantasmes et les fausses connaissances des « non-euclidiens ». Comme les anciens sophistes, ces « non-euclidiens » ne semblent pas se rendre compte que leurs facultés mentales ont été obscurcies pas l'opération des esprits du mal.

M. Ryan ne dit pas si cette opération est effective et transitive... mais au moins le lecteur qui voudrait en savoir plus sur le sujet sait à quoi s'en tenir !

Pour en savoir plus...

[DR] Gabriel Dos Reis, *Première rencontre avec* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, Hubris (1997), no. 0, 12–20.

[L] Roger C. Lyndon, *Groups and geometry*, London Mathematical Society Lecture Series, no. 101, Cambridge University Press, 1985.

Fonctions holomorphes

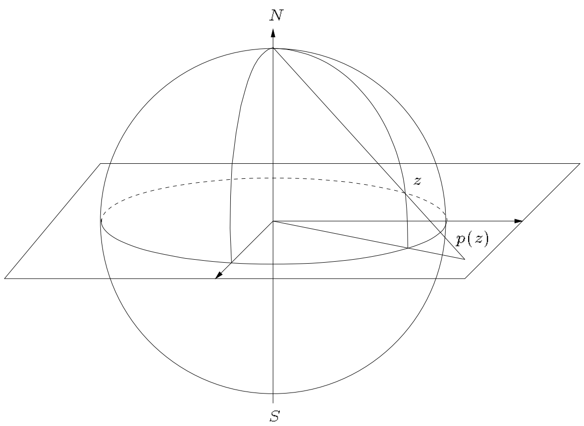
Alexandre Boisseau et Nicolas Markey
boisseau@dptmaths.ens-cachan.fr, markey@dptmaths.ens-cachan.fr

Introduction

L'analyse complexe est un sujet classique. Beaucoup la maîtrisent déjà très bien. Mais trop nombreux sont ceux qui n'en connaissent que quelques théorèmes, sans connaître les fondements de la théorie. Et cependant, ces résultats sont très utiles – et utilisés. Nous avons donc décidé de prendre le sujet « depuis la base », n'en déplaise aux analystes confirmés.

Préliminaires

Cela ne nous empêche pas de supposer connues les propriétés de $\mathbf{C}$ et de son « compactifié », que l'on notera $\overline{\mathbf{C}}$, dans lequel on a ajouté le point à l'infini, noté ∞. Pour les non-initiés, rappelons que la projection stéréographique est l'application de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ dans le plan $\mathbf{R}^2$ qui à un point z de la sphère, différent du pôle Nord N, associe le point du plan $p(z)$ tel que les points $p(z)$, z et N soient alignés. C'est une bijection. Dans ces conditions, on la prolonge au pôle Nord par le point à l'infini. Les détails de cette construction sont expliqués dans [DR]



Les fonctions holomorphes

C-Différentiabilité

Dans un souci de clarté, le terme « fonction » désignera désormais une fonction d'une variable complexe à valeurs complexes. L'ensemble de définition d'une fonction est supposé être un domaine de $\mathbf{C}$, *i.e.* un sous-ensemble ouvert connexe.

Soit donc f une fonction, et a un élément de l'intérieur de son ensemble de définition. La fonction f est $\mathbf{C}$-*différentiable* en a si, lorsque h est dans un voisinage de a, on peut écrire $f(a+h) = f(a)+l(h)+o(h)$, où l est $\mathbf{C}$-linéaire. La fonction l est la dérivée de f en a, on la note $(\partial f/\partial z)(a)$, $\mathrm{d}f_a$ ou $f'(a)$.

Cette définition est analogue à celle rencontrée dans le cas de fonctions à variables réelles. Cependant, la $\mathbf{C}$-différentiabilité des fonctions de variables complexes est « plus restrictive ». Par exemple, la fonction $f\colon (x+iy) \mapsto x+2iy$ n'est nulle part $\mathbf{C}$-différentiable. En effet, par linéarité, on ramène le problème en 0. Le taux d'accroissement s'écrit alors $(a+2ib)/(a+ib)$. Il admet deux limites différentes en 0, selon que l'on fait tendre d'abord a ou b vers 0.

Notons tout de suite que la somme, le produit et la composition d'applications $\mathbf{C}$-différentiables – aux bons endroits – sont $\mathbf{C}$-différentiables. Il nous est désormais possible d'introduire la notion qui nous intéresse : on dit qu'une fonction f est holomorphe en un point a si elle est $\mathbf{C}$-différentiable dans un voisinage de ce point. Le domaine d'holomorphie de f est l'ensemble des points où f est holomorphe. L'ensembles des fonctions holomorphes sur un domaine D a alors une structure de $\mathbf{C}$-algèbre.

L'habitude de travailler sur $\mathbf{R}$ nous conduit naturellement à étudier la $\mathbf{C}$-différentiabilité de f lorsqu'on écrit $f(x+iy)$ sous la forme $F(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$ dans $\mathbf{R}^2$. Comme f est $\mathbf{C}$-différentiable, F est dérivable par rapport à ses deux variables, et la matrice jacobienne de F doit être $\mathbf{C}$-linéaire. Or cette matrice s'écrit

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Pour être $\mathbf{C}$-linéaire, cette matrice doit être une matrice de similitude (une fonction g est $\mathbf{C}$-linéaire si et seulement si elle est $\mathbf{R}$-linéaire et $g(i) = i \cdot g(1)$.) Donc, f est holomorphe si et seulement si ses parties réelle a et imaginaire b vérifient les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}.$$

Applications conformes

Donnons dès maintenant une conséquence du caractère holomorphe d'une fonction : une fonction holomorphe dont la différentielle n'est pas nulle est conforme, c'est à dire qu'elle conserve les angles. Commençons par une définition : une courbe dans $\mathbf{C}$ est une application $\gamma : [x,y] \to U$, où U est un domaine de $\mathbf{C}$, et x et y deux réels, qui est de classe C^1.

Considérons maintenant deux courbes γ et η passant par un même point a en lequel leur vecteur dérivé n'est pas nul. L'angle entre ces vecteurs est appelé angle entre les courbes γ et η au point a. On peut en calculer les sinus et cosinus à partir des coordonnées des deux vecteurs tangents.

Dans ces conditions, si on prend une fonction holomorphe f de U dans $\mathbf{C}$, alors $f\circ\gamma$ et $f\circ\eta$ sont deux courbes – nous verrons plus tard pourquoi une fonction holomorphe est en fait de classe C^∞ – passant toutes les deux par le point $f(a)$. Le vecteur dérivé de $f\circ\gamma$ en a est donné par $(d/dt) f\circ\gamma(t) = f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$. De même pour $f\circ\eta$. En particulier, les vecteurs dérivés au point $f(a)$ sont simplement multipliés par la constante non-nulle $f'(a)$, *i.e.*transformés par une similitude. Donc, l'angle entre ces deux vecteurs est le même que celui entre les deux vecteurs d'origine.

Fonctions analytiques

La définition d'une fonction holomorphe permet de vérifier si une fonction est holomorphe, mais ne permet ni de construire, ni de caractériser simplement une telle fonction.

Séries entières

Une série formelle est une suite de nombres complexes indexés par les entiers naturels. On la représente souvent sous forme « fonctionnelle », *i.e.*

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n X^n.$$

On définit sur l'ensemble des séries formelles une somme, un produit, qui prolongent la somme et le produit définis sur les polynômes. Étant donnée une série formelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on définit également l'ordre de f comme étant le plus petit entier p tel que a_p soit non nul. On vérifie alors facilement que l'ordre d'un produit de séries formelles est égal à la somme des ordres des séries formelles. On vérifie aisément que l'ensemble des séries formelles forme une $\mathbf{C}$-algèbre.

Intéressons nous maintenant à l'inversibilité des séries formelles. Soit f une série formelle. Si f est inversible, il existe une série formelle g telle que $f\cdot g$ soit égal à 1 – la série formelle 1. En particulier, l'ordre de fg, *i.e.* la somme des ordres de f et de g, doit être nul. Donc, f et g doivent avoir un ordre nul, *i.e.* avoir un « terme constant » non nul.

Montrons que la réciproque est vraie : soit f une série formelle dont le terme constant n'est pas nul. En multipliant f par une constante, on peut se ramener au cas où ce terme constant vaut 1. Alors f s'écrit sous la forme $1-h$ où h est une série formelle d'ordre strictement positif. Alors l'inverse de $1-h$ est $1+h+h^2+h^3+\cdots$. Il reste à voir si cette somme « a un sens », *i.e.* si on peut en calculer les termes. Comme h est d'ordre strictement positif, elle peut s'écrire $a_1X + a_2X^2 + \cdots$, et donc h^n est d'ordre au moins n. En conséquence, pour calculer le terme d'ordre q de l'inverse de f, il suffit de calculer les q premières puissances de h. Cela signifie que $(1+h+h^2+\cdots+h^q)\cdot f = 1 + X^q\cdot g$ où g est une série formelle quelconque, q pouvant être arbitrairement grand.

Tout cela n'intéresse que moyennement les analystes, qui auront tendance à demander aux séries d'être convergentes. On considère donc maintenant les séries qui convergent au moins sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Les principaux résultats sur la convergence des séries sont :

- si une série est de Cauchy, elle converge uniformément.
- la convergence uniforme préserve la continuité.
- la convergence absolue (respectivement uniforme) entraîne la convergence simple.
- si une double somme converge absolument, alors on peut permuter les sommes, et les deux séries convergent simplement vers la même limite.

Ils sont normalement connus, et nous ne les démontrons pas ici.

Regardons de plus près le domaine sur lequel une série est convergente. On remarque tout d'abord que s'il existe un réel strictement positif r tel que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|\, r^n \text{ converge}$$

alors la série converge absolument en tout point de l'intérieur du disque centré en 0 et de rayon r. Inversement, le critère de Cauchy nous permet d'affirmer que si la série diverge en un point z, elle diverge également en tout point extérieur au disque de centre 0 et de rayon $|z|$. En conséquence, on peut définir le rayon de convergence r d'une série comme étant infini si la série converge en tout point, et comme étant la borne supérieure des réels positifs pour lesquels la série converge sinon. Alors, en tout point intérieur au disque centré en 0 et de rayon r, que nous noterons désormais D_r, la série converge, et elle diverge en tout point extérieur à ce disque. Cependant, il n'existe aucun résultat général au sujet de la convergence sur la frontière de ce disque.

Le calcul du rayon de convergence d'une série entière ne peut pas être fait dans le cas général en cherchant le plus grand réel rendant la série convergente. Il existe un autre moyen de le calculer. Démontrons la relation

$$\frac{1}{r} = \limsup(|a_n|^{1/n})$$

où r est le rayon de convergence de la série $\sum_k a_k X^k$, connue sous le nom de formule de Cauchy-Hadamard.

Posons $s = \limsup(|a_n|^{1/n})$, que l'on suppose dans un premier temps ni nul, ni infini. Alors quel que soit ϵ strictement positif, il n'existe qu'un nombre fini de termes de la suite vérifiant $|a_n|^{1/n} \geqslant s + \epsilon$, donc ne vérifiant pas $|a_n| \leqslant (s+\epsilon)^n$. Donc, si $|X|$ est inférieur à $1/(s+\epsilon)$, alors la série converge en X. Donc, le rayon de convergence est supérieur à $1/(s+\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$, donc à $1/s$.

Inversement, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité d'entier vérifiant $|a_n| \geqslant (s-\epsilon)^n$, alors pour $|X| = 1/(s-\epsilon)$, la série diverge en X. Le rayon de convergence est donc inférieur à $1/(s-\epsilon)$, donc à $1/s$.

Pour les cas particuliers : dans le cas où $s = 0$, il suffit de montrer que r est supérieur à $1/(s+\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$. La première partie de la démonstration ci-dessus convient. Dans l'autre cas, lorsque $s = \infty$, alors pour tout $M > 0$,il existe une infinité de termes $|a_n| \geqslant M$. Dans ce cas, la série diverge si $|z| = 1/M$. Cela étant vrai pour tout M, le rayon de convergence est nul.

Fonctions analytiques

Une fonction est analytique au point $z_0 \in \mathbf{C}$ s'il existe une série $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dont le rayon de convergence r est non nul, et vérifiant, pour η dans un voisinage de 0, et de module inférieur à r :

$$f(z_0+\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \eta^n.$$

Le domaine d'analyticité de f est l'ensemble des points où f est analytique. Il est clair que la somme et le produit de fonctions analytiques sur un domaine D sont analytiques sur D.

Pour pouvoir utiliser le développement en série entière d'une fonction analytique, il serait intéressant d'avoir un résultat d'unicité de la décomposition. Ce résultat est le suivant : si $f(X) = \sum_k a_k X^k$ est une série entière non constante dont le rayon de convergence est non nul, et si $f(0)$ est nul, alors il existe un réel s strictement positif tel que pour tout $0 \neq |X| < s$, on ait $f(X) \neq 0$. En effet, $f(0)$ étant nul, on a

$$f(X) = a_n X^n (1 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots).$$

Pour $|X|$ assez petit, $1 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots$ n'est pas nul, puisque la série a un rayon de convergence non nul. En conséquence, si X est non nul, mais proche de 0, $f(X)$ n'est pas nul. A partir de ce résultat, si deux séries entières coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation en 0, alors elles sont égales.

Il peut sembler clair que toute série entière est analytique sur son disque de convergence. Montrons néanmoins rapidement ce résultat : soit $f(X) = \sum_k a_k X^k$ une série entière convergeant sur D_r. Alors si z_0 appartient à l'intérieur de D_r, si z est un point au voisinage de z_0, on a $z^n = (z_0 + (z - z_0))^n$. En développant cette expression, et puisqu'on peut permuter les sommations sur le domaine de convergence, on obtient

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} C_k^n a_n z_o^{n-k} \right) (z-z_0)^k.$$

Retour aux fonctions holomorphes

Le résultat suivant permet d'affirmer que toute fonction analytique est holomorphe. Ce résultat est d'autant plus important que sa réciproque est vraie, comme nous le verrons plus tard. Montrons donc la propriété suivante :

Théorème. — ***si $f(X) = \sum_k a_k X^k$ est une série entière convergeant sur D_r, alors la série $g(X) = \sum_k k a_k X^{k-1}$ converge sur D_r, et c'est la dérivée de f.***

Il est facile de montrer que la série g converge sur D_r, en calculant $\limsup |na_n|^{1/n}$. Comme $n^{1/n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, on a $\limsup |na_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}$.

Soit maintenant $X \in D_r$, et $\epsilon > 0$ tel que $|X| + \epsilon < r$. Soit $h \in D_\epsilon$. Alors

$$f(X+h) = \sum_k a_k \left(X^k + khX^{k-1} + h^2 P_k(X,h) \right).$$

avec $P_k(X,h) = \sum_k C_k^n h^{k-2} X^{n-k}$.

Alors $|a_k P_k(X,h)| \leqslant |a_k| |P_k(|X|,\epsilon)|$, donc la quantité

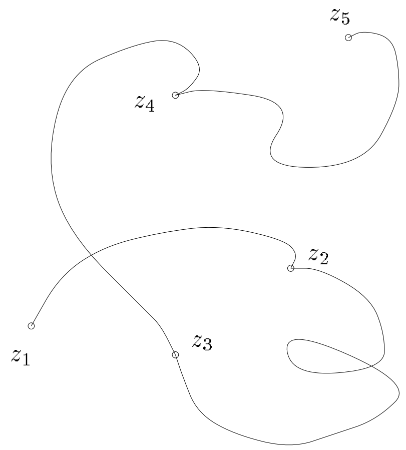
$$\left| \frac{f(X+h) - f(X)}{h} - \sum_k k a_k X^{k-1} \right|$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0. En particulier, on obtient l'expression du k-ième coefficient : $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Le théorème de Cauchy

Intégrale sur un chemin

Rappelons qu'une *courbe* est une application γ de classe C^1 d'un intervalle réel fermé $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$. Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés points de départ et d'arrivée respectivement. Alors l'image d'une courbe par une application holomorphe est une courbe, si l'on admet – provisoirement – qu'une fonction holomorphe est infiniment dérivable. Un chemin est également une application η d'un intervalle réel fermé $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$, mais uniquement supposé continue. L'image par une application holomorphe est alors un chemin. Un chemin C^1 par morceaux peut alors être vu comme la « concaténation » d'un nombre fini de courbes $(\gamma_i)_{i\in I}$ définies sur des intervalles $[a_i,b_i]$, et telles que le point d'arrivée de γ_i soit égal au point de départ de γ_{i+1} pour i entre 1 et $n-1$.



Soient alors γ un chemin et f une fonction complexe tels que $f\circ\gamma$ soit continu sur $[a,b]$. On définit alors l'intégrale de f le long de γ par

$$\int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_a^b f\circ\gamma(t)\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

L'intégrale ainsi définie est linéaire, et ne dépend pas du paramétrage du chemin. En effet, si η est un autre paramétrage de la courbe γ, *i.e.* s'il existe τ dérivable par morceaux et strictement croissante du domaine de définition de γ sur celui de η, alors l'intégrale de f est la même sur γ et η. Le théorème de changement de variable dans une intégrale nous donne le résultat. De la même façon, on montre que, étant donné un chemin défini sur $[a,b]$, si on considère le chemin γ_- sur l'intervalle $[a,b]$ donné par $\gamma_-(t)=\gamma(a+b-t)$, alors l'intégrale sur γ_- est l'opposée de l'intégrale sur γ. Enfin, il peut être utile de majorer une intégrale :

$$\left|\int_\gamma f\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_\gamma |f|\,|\mathrm{d}\gamma|$$

où $|\mathrm{d}\gamma| = |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$. En effet, notons I l'intégrale. Alors de f sur γ. Alors $I=|I|\,e^{i\theta}$. Donc

$$\begin{array}{rcl}|I| & = & \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}f\circ\gamma(t)\gamma'(t))\mathrm{d}t\\ & \leqslant & \int_a^b |f\circ\gamma(t)|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.\end{array}$$

En particulier, si en tout point de γ, M est supérieur à $|f(t)|$, alors $\left|\int_\gamma f\mathrm{d}\gamma\right| \leqslant M\,|\gamma|$ où $|\gamma|$ est la longueur du chemin.

Étudions un exemple, qui nous sera utile par la suite : on considère, sur le cercle $\gamma(t)=a+re^{it}$, la fonction $f_n(z)=(z-a)^n$. Alors $f\circ\gamma(t)=r^ne^{int}$, et $\gamma'(t)=ire^{it}$. Un rapide calcul montre que cette intégrale est nulle dans le cas général, sauf pour $n=-1$, auquel cas elle vaut $2i\pi$.

Si f est une fonction définie sur un domaine D, on appelle *primitive* de f toute fonction holomorphe F dont la dérivée vaut f sur D. Il est alors clair que si F est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est obtenu en ajoutant une constante complexe quelconque à F.

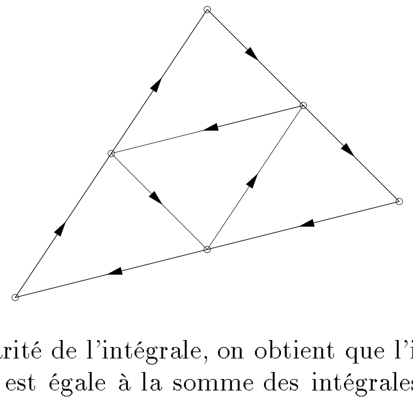
Le théorème de Cauchy local

Théorème (Cauchy). — ***Si f est holomorphe dans un domaine D, et si Δ est un triangle (en tant que surface) inclus dans D, dont on oriente le bord, alors l'intégrale le long du contour du triangle est nulle.***

Supposons le résultat faux sur un triangle Δ_0 :

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f\mathrm{d}z\right| = M > 0.$$

On peut partager le triangle Δ_0 en 4 triangles, en reliant les milieux des côtés.



Par linéarité de l'intégrale, on obtient que l'intégrale sur $\partial\Delta_0$ est égale à la somme des intégrales sur les quatre petits triangles. En particulier, sur l'un des petits triangles, que l'on note Δ_1, le module de l'intégrale est supérieure à $M/4$. On peut réitérer l'opération, et on construit ainsi une suite de triangles Δ_n

sur lesquels l'intégrale est, en module, supérieure à $M/4^n$. Tous ces triangles ont au moins un point commun, puisqu'ils forment une suite décroissante. On note z_0 ce point, qui appartient à Δ_0, donc à D. En ce point, f est holomorphe, donc quel que soit ϵ strictement positif, il existe une boule B centrée en z_0 et de rayon δ non nul sur laquelle

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot(z-z_0)}{z-z_0}\right|<\epsilon.$$

On note $\alpha(z)$ le quotient ci-dessus. Il existe alors un triangle Δ_n parmi ceux construits précédemment, dont l'adhérence est incluse dans B. L'intégrale sur ce triangle vaut :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\partial\Delta_n} f\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\mathrm{d}z + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\mathrm{d}z \\ + \textstyle\int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)\cdot(z-z_0)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

les deux premières intégrales étant nulles, puisque – il est facile de le montrer – elles ne dépendent que des extrémités du chemin, et sont donc nulles sur un chemin fermé. Donc, l'intégrale de f le long du contour de Δ_n est égale à celle de $\alpha(z)\cdot(z-z_0)$. Or sur $\partial\Delta_n$, $|\alpha(z)|<\epsilon$ et $|z-z_0|<|\partial\Delta_n|$. On obtient alors $M/4^n<\epsilon\,|\partial\Delta_n|^2$. Or $|\partial\Delta_n|=|\partial\Delta|/2^n$. Donc, $M<\epsilon\,|\partial\Delta|^2$, et M est nul, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Ce théorème va nous permettre de montrer l'existence, pour une fonction holomorphe, d'une primitive le long d'un chemin. Montrons en premier lieu ce résultat localement : si U est un voisinage de z_0 inclus dans le domaine D d'holomorphie de la fonction f, alors

$$F(z)=\int_{[z_0,z]} f(t)\mathrm{d}t$$

(où $[z_0,z]$ désigne le segment de droite reliant les points z_0 et z), définie sur U, est une primitive de f. En effet, soit z un élément de U et δ un complexe non nul tel que $z+\delta$ soit à l'intérieur de U. Alors le triangle de sommets z_0, z et $z+\delta$ est inclus dans D, donc l'intégrale de f le long de son contour est nulle, *i.e.*

$$F(z+\delta)-F(z)=\int_{[z,z+\delta]} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, il est clair que $\delta f(z)$ est égal à l'intégrale par rapport à t de $f(z)$ sur le segment $[z,z+\delta]$. En conséquence, on a

$$|F(z+\delta)-F(z)-\delta f(z)|=\int_{[z,z+\delta]}(f(t)-f(z))\mathrm{d}t.$$

Mais f est continue, puisqu'elle est holomorphe : pour tout ϵ strictement positif, on pourra trouver δ_0 tel que, si δ est inférieur à δ_0, alors $f(t)-f(z)$ sera, en module, inférieur à ϵ. Dans ces conditions, on arrive à

$$\left|\frac{F(z+\delta)-F(z)}{\delta}-f(z)\right|<\epsilon,$$

ce qui exprime que F est différentiable, et que $F'(z)=f(z)$. Remarquons tout de suite qu'on ne s'est servi que de la continuité de f, ainsi que du fait que son intégrale sur tout contour triangulaire est nulle. Ces deux conditions sont donc suffisantes pour l'existence d'une primitive.

Étendons ce résultat à un chemin γ quelconque défini sur le segment réel $[a,b]$. Une fonction Φ, définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ est une *primitive de f le long de γ* si elle est continue et si, au voisinage de chaque point z du chemin, f admet une primitive F_z telle que $F_z\circ\gamma=\Phi$ sur ce voisinage. Montrons l'existence d'une telle fonction.

On peut diviser $[a,b]$ en segments $[a_k,b_k]$, avec $a_1=a$, $b_n=b$, de telle façon que deux segments voisins se recouvrent partiellement, *i.e.* $a_k<a_{k+1}<b_k$. Comme γ est uniformément continue, on peut supposer que l'image du segment $[a_k,b_k]$ par γ est incluse dans une boule ouverte, notée U_k, elle-même incluse dans le domaine d'holomorphie D de f. Dans ces conditions, à l'intérieur de U_k, f admet une primitive.

Notons F_1 une primitive de f sur U_1, et F_2 une primitive de f sur U_2. Alors, sur l'intersection – non vide – de U_1 et U_2, les deux primitives ne diffèrent que d'une constante. On peut choisir F_2 pour que cette constante soit nulle, la nouvelle fonction F_2 étant toujours une primitive de f sur U_2. On peut alors itérer ce processus sur toutes les boules U_k, en définissant des primitives F_k de f sur U_k telles que F_k et F_{k+1} coïncident sur l'intersection non vide $U_k\cap U_{k+1}$. Alors la fonction $\Phi(t)=F_k\circ\gamma(t)$, pour $t\in[a_k,b_k]$, est une primitive de f le long de γ.

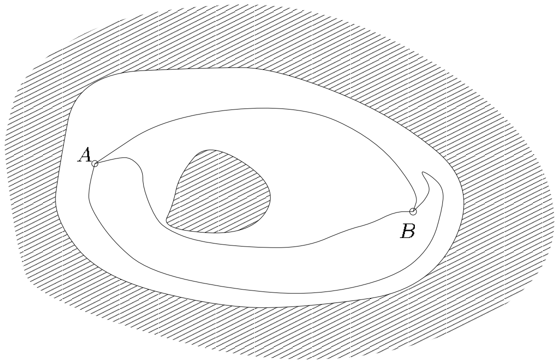
Par ailleurs, deux primitives de f le long de γ ne peuvent différer que d'une constante. Soient en effet deux telles primitives. Leur différence est constante au voisinage de chaque point de $[a,b]$. Par connexité, la différence est constante sur tout le segment.

Enfin, si γ est un chemin, et si f est une fonction admettant une primitive le long de γ, alors l'intégrale de f sur γ ne dépend que des extrémités du segment de définition de γ. Pour le montrer, il suffit de le montrer sur une courbe, puisqu'un chemin est « la concaténation » de courbes. Sur une courbe, le résultat est immédiat, puisque la dérivée de Φ est $f\circ\gamma\cdot\gamma'$, et donc l'intégrale de f le long de γ est la différence des valeurs de Φ aux extrémités du chemin.

Le théorème de Cauchy

Commençons par introduire la notion d'homotopie. Soient γ_0 et γ_1 deux chemins définis d'un intervalle $I = [a, b]$ dans un domaine D et d'extrémités communes A et B. Ces deux chemins sont dits *homotopes* s'il existe une application continue $\Gamma\colon [0,1] \times I \to D$ telle que $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ et $\Gamma(s,a) = A$, $\Gamma(s,b) = B$.

Par exemple, sur le dessin ci-dessous, on a un domaine « troué ». Les deux chemins passant en dessous du trou sont homotopes, mais ils ne sont pas homotopes au chemin qui passe au dessus du trou.



On peut désormais énoncer et montrer le théorème de Cauchy :

Théorème (Cauchy). — ***Si f est une fonction holomorphe dans un domaine D, et si γ_1 et γ_2 sont deux chemins définis sur $I = [a, b]$, homotopes dans D, alors l'intégrale de f est la même le long de γ_1 et de γ_2.***

Pour montrer ce résultat, on va procéder de la même façon que dans le théorème de Cauchy local : on considère le rectangle $[0,1] \times I$, et on le découpe en petits rectangles $R_{i,j}$, qui se recouvrent partiellement l'un l'autre, et suffisament petits pour que sur l'image de chacun d'eux par Γ, f admette une primitive. Alors, lorsqu'on fixe i, on peut choisir une famille de primitives $(F_{i,j})_j$ de f sur $R_{i,j}$ qui coïncident sur l'intersection de deux rectangles voisins. On obtient alors une primitive $\Phi_i(s,t) = F_{i,j} \circ \Gamma(s,t)$ sur $\cup_j R_{i,j}$. On recommence la même opération dans l'autre sens, les primitives Φ_i étant définies à une constante additive près. On obtient une fonction Φ définie sur $[0,1] \times I$. Alors, si s est fixé, et si on pose $\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$, on a

$$\int_{\gamma_s} f \mathrm{d}z = \Phi(s,b) - \Phi(s,a).$$

Mais les fonctions $\Phi(s,a)$ et $\Phi(s,b)$ sont localement constantes, puisqu'elles sont définies par la composition de Γ par $F_{i,j}$, et que $\Gamma(s,a)$ et $\Gamma(s,b)$ sont constantes. Par connexité, $\Phi(s,a)$ et $\Phi(s,b)$ sont constantes sur $[0,1]$.

En particulier, si un chemin est homotope à 0, l'intégrale sur ce chemin de toute fonction holomorphe est nulle. En particulier, dans un domaine simplement connexe, *i.e.*dont le bord est connexe, l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin fermé est nulle.

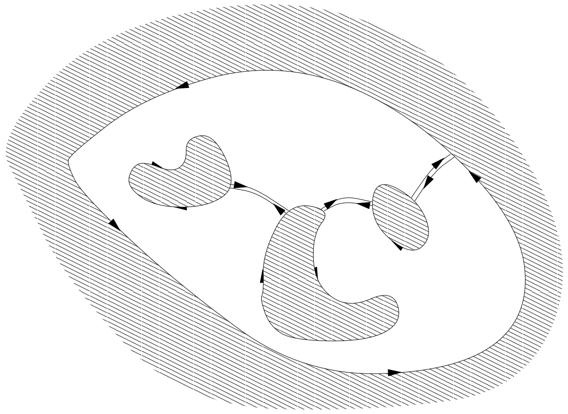
Comme précédemment, le théorème de Cauchy permet d'établir l'existence d'une primitive : si f est holomorphe dans un domaine simplement connexe D, alors f admet une primitive. Remarquons dans un premier temps que l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin d'un domaine simplement connexe ne dépend que des extrémités : en effet, si γ_1 et γ_2 sont deux chemins ayant les mêmes extrémités, on définit γ_{2-} comme l'« inverse » de γ_2, *i.e.* $\gamma_{2-}(t) = \gamma_2(a_2 + b_2 - t)$ sur $[a_2, b_2]$. Par ailleurs, par translation du segment $[a_2, b_2]$, on se ramène au cas où $b_1 = a_2$. On peut alors définir la « concaténation » de γ_1 et γ_{2-} sur $[a_1, b_2]$. Ce nouveau chemin est homotope à 0, et donc les intégrales de f sur γ_1 et γ_{2-} sont opposées. Comme les intégrales sur γ_2 et γ_{2-} sont également opposées, on obtient l'égalité des intégrales sur γ_1 et γ_2.

Dans ces conditions, si on fixe arbitrairement un point z_0 dans D, on peut définir une fonction $F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(t)\mathrm{d}t$, puisqu'elle ne dépend pas du chemin reliant z_0 à z. Tout comme on l'a fait précédemment, on montre que F est holomorphe, et que sa dérivée est f.

La formule de Cauchy

On revient au cas des domaines connexes, mais éventuellement non simplement connexes. Pour de tels domaines, la frontière est constituée d'un nombre fini de chemins fermés, dont l'un sépare les points de D du point à l'infini. On l'appelle frontière extérieure. On oriente alors la frontière de la façon suivante : la frontière extérieure est orientée dans le sens direct, et les autres chemins de la frontière dans le sens indirect. Avec cette orientation, l'intérieur du domaine est situé sur la gauche du sens de parcours.

Dans ces conditions, si f est une fonction holomorphe sur l'adhérence de D, alors l'intégrale de f sur la frontière orientée de D est nulle. Pour montrer ce résultat, il suffit de relier les composantes connexes de la frontière entre elles. On définit alors un nouveau chemin Γ, homotope à 0, sur lequel f est holomorphe.



Sur ce chemin, l'intégrale de f est nulle. Par ailleurs, les portions de chemins ajoutées étant « opposées », ils ne modifient pas la valeur globale de l'intégrale. Donc, l'intégrale d'une fonction holomorphe sur le bord orienté de D est nulle.

Il nous est maintenant possible de montrer le résultat suivant, appelé « formule de Cauchy », très important pour la suite :

Théorème. — *Soit f une fonction holomorphe dans l'adhérence d'un domaine D compact dont la frontière est constituée d'un nombre fini de chemins. Alors pour tout $z \in D$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t$$

∂D désignant la frontière orientée de D.

Ce théorème se montre assez facilement : soit $r > 0$, tel que l'adhérence de la boule $B_{z,r}$, centrée en z et de rayon r, soit incluse dans D. On pose $D_r = D \setminus \overline{B_{z,r}}$. Alors la fonction $f(t)/(t-z)$, que nous noterons g(t), est holomorphe sur D_r, puisque c'est un quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. La frontière de D_r est constitué de la frontière de D à laquelle on ajoute le cercle $C_{z,r}$ centré en z et de rayon r. Mais le théorème de Cauchy assure que l'intégrale de g sur le contour de D_r est nulle, puisque g est holomorphe sur l'adhérence de D_r. Donc,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t = \int_{C_{z,r}} \frac{f(t)}{t-z}dt.$$

Mais f étant continue, pour tout ϵ strictement positif, on peut choisir r de telle sorte que $|f(t)-f(z)| < \epsilon$ sur $D_{z,r}$. Par ailleurs, comme nous l'avons vu précédemment, l'intégrale de $(t-z)^{-1}$ sur un cercle centré en z vaut $2\pi i$. On a donc

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{z,r}} \frac{f(z)-f(t)}{t-z}\mathrm{d}t.$$

Le deuxième terme est de module inférieur à ϵ. On a donc le résultat souhaité.

Le résultat suivant en découle :

Théorème. — *Si f est holomorphe dans un domaine D, elle est développable en série entière au voisinage de tout point de D.*

Soit z_0 un point de D, r strictement positif tel que $B_{z_0,r}$ soit incluse dans D, et z un point de $B_{z_0,r}$. On note C le cercle $C_{z_0,r}$.Dans ces conditions, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t.$$

Mais $(t-z)^{-1}$ peut être développé en série entière. On a

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

La convergence est alors absolue et uniforme sur $B_{z_0,r}$. Multiplions les deux membres par $f(t)/(2\pi i)$. La convergence est toujours uniforme et absolue. On peut donc intégrer termes à termes les deux membres, et permuter les sommes et les intégrales. On obtient

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n (z-z_0)^n,$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

En particulier, si f est de module borné par M sur le cercle C, on obtient $|c_n| \leqslant M/r^n$. Cette majoration a une conséquence intéressante :

Théorème (Liouville). — *Si f est holomorphe et bornée sur $\mathbf{C}$, elle est constante.*

En effet, dans toute boule fermée centrée en 0 et de rayon r, $|c_n|$ est majorée par M/r^n. Donc, hormis c_0, tous les c_n sont nuls. Donc f est constante.

Ne nous arrêtons pas en si bon chemin. Nous n'avons pas encore suffisamment exploité la formule de Cauchy. Énonçons maintenant quelques propriétés des fonctions holomorphes, afin d'arriver ensuite à une autre caractérisation.

Théorème. — *La dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe, et par conséquent, une fonction $\mathbf{C}$-différentiable est de classe C^∞.*

Ce résultat se montre aisément en passant aux séries entières. On en déduit immédiatement la propriété suivante :

Théorème. — ***Si f est continue et admet une primitive dans un domaine D, elle est holomorphe dans D.***

Ce théorème découle de la remarque qui a été faite après la démonstration de l'existence d'une primitive locale. On en déduit alors le résultat suivant, qui caractérisera les fonctions holomorphes :

Théorème (Moréra). — ***Si une fonction f est continue dans un domaine D, et si son intégrale le long du contour de tout triangle inclus dans D est nulle, alors f est holomorphe dans D.***

Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre $F(z) = \int_{[a,z]} f(t)\mathrm{d}t$, avec a un point de D et z un point d'un disque $B_{a,r}$ inclus dans D. Alors F est holomorphe dans $B_{a,r}$, sa dérivée vaut f. Donc, f est holomorphe.

En résumé, on a donc montré le résultat suivant :

Théorème. — ***Les trois propositions suivantes sont équivalentes, et caractérisent le fait qu'une fonction est holomorphe :***

définition de Riemann ***: la fonction f est $\mathbf{C}$-différentiable dans un voisinage V d'un point z,***

définition de Cauchy ***: la fonction f est continue dans un voisinage V d'un point z, et son intégrale le long de la frontière de tout triangle inclus dans V est nulle,***

définition de Weierstrass ***: la fonction f est développable en une série entière convergente dans un voisinage V d'un point z.***

Le théorème des résidus

Il serait dommage de s'arrêter là, sans parler du théorème des résidus. C'est une application très intéressante de l'analyse complexe. Elle nécessite cependant d'introduire la notion de séries de Laurent, et de « travailler » encore un peu...

Les séries de Laurent

La notion de séries de Laurent généralise la notion de séries entières dont on a parlé précédemment. Elle prolonge donc également la notion d'holomorphie. Pour en parler, nous aurons besoin de la définition d'une couronne : la couronne de centre a, de rayon intérieur r et de rayon extérieur R est l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} | r < |z-a| < R\}$. Le bord de cette couronne est composé des cercles γ_r, de rayon r, et γ_R, de rayon R. On suppose ces deux cercles orientés dans le sens direct.

Le résultat suivant permet de définir les séries de Laurent :

Théorème (Laurent). — ***Toute fonction f holomorphe dans une couronne $C = C_{a,r,R}$ peut s'écrire sous forme d'une série, dite série de Laurent :***

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}t \qquad (r < \rho < R).$$

Soit z un point de $C_{a,r,R}$. On considère une couronne $C' = C_{a,r',R'}$ contenant z et dont l'adhérence est incluse dans C. On peut alors écrire la formule de Cauchy sur C' :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(t)}{t-z_0}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(t)}{t-z_0}\mathrm{d}t.$$

En écrivant les développements

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \qquad \text{pour } t \in \gamma_{R'}$$

et

$$-\frac{1}{t-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \qquad \text{pour } t \in \gamma_{r'}$$

on arrive au résultat souhaité, en procédant comme dans la démonstration du théorème . Le théorème de Cauchy nous permet, dans l'expression de c_k, d'intégrer sur un cercle intermédiaire.

Arrêtons-nous un instant sur la convergence d'une série de Laurent. La *partie régulière*, *i.e.*la somme sur les entiers positifs, converge sur un disque centré en 0 et de rayon R donné par la formule de Cauchy-Hadamard. La *partie principale*, *i.e.*la somme sur les entiers strictement négatifs, est une série entière en $z' = (z-z_0)^{-1}$. Elle converge donc à l'extérieur d'une disque de centre 0 et de rayon r. Le domaine de convergence, s'il est non vide, est donc une couronne.

Comme pour les fonctions analytiques, on a un résultat d'unicité des coefficients : si une fonction se représente par une série de Laurent, les coefficients sont nécessairement ceux définis dans le théorème de Laurent. En effet, si $f(z)$ s'écrit comme la somme des $c_k \cdot (z - z_0)^k$, avec $k \in \mathbf{Z}$, alors en multipliant f par $(z-z_0)^{-(n+1)}$, et en intégrant sur un cercle γ_ρ, on obtient l'expression de c_k mentionnée dans le théorème de Laurent, puisque l'intégrale de $(z - z_0)^{k-n-1}$ est nulle en général, sauf dans le cas où $k = n$, où elle vaut $2\pi i$.

On en déduit en particulier la majoration des coefficients de la série de Laurent : si une fonction f est développable en série de Laurent, si f est majorée en module par M sur le cercle γ_ρ, alors on a $c_k \leqslant M/\rho^k$.

Les séries de Laurent ont été introduites pour parler de fonctions holomorphes sur des couronnes, *i.e.* sur des domaines auxquels on enlève le voisinage d'un point où la fonction ne serait pas dérivable. En conséquence, on appelle *point singulier* d'une fonction f un point en lequel f n'est pas holomorphe. On dit que z_0 est un *point singulier isolé* de f s'il existe un voisinage pointé de z_0 dans lequel f est holomorphe. On peut alors distinguer plusieurs cas :

- soit la limite de f en z_0 est de module fini, auquel cas on parle de point singulier *artificiel*,
- soit cette limite est le point à l'infini, et on parle alors de *pôle* de f,
- soit enfin f n'admet pas de limite en z_0. C'est un point singulier *essentiel*.

Ces trois catégories de points singuliers correspondent à trois situations : soit le développement en série de Laurent au point z_0 ne contient pas de terme de puissance négative (strictement), auquel cas z_0 est artificiel, soit il en contient un nombre fini et z_0 est un pôle, soit il en contient une infinité, et c'est un point singulier essentiel. Établissons cette caractérisation :

Tout d'abord, si f se développe en série de Laurent sans terme de puissance négative dans un voisinage pointé de z_0, c'est une fonction analytique, donc son domaine de convergence est convexe. Donc elle converge et est continue en z_0. Réciproquement, si la fonction converge en z_0 vers une valeur de module fini, alors $|f|$ est majorée par M dans une boule de rayon R privée de son centre z_0. Or on a $|c_k| \leqslant M/r^k$ pour tout $r < R$ non nul. Donc, pour k négatif, $c_k = 0$.

Supposons maintenant que f admet une série de Laurent avec un nombre fini de termes de puissance négative. Notons n_0 l'indice le plus petit pour lequel le coefficient est non nul. On pose alors $g(z) = (z - z_0)^{n_0} \cdot f(z)$. Alors g est holomorphe en z_0, et la limite de g en z_0 vaut c_{n_0}, qui est fini et non nul par hypothèse. Donc la fonction $g(z)/(z-z_0)^{n_0}$ tend vers l'infini lorsque z tend vers z_0. Réciproquement, si f est holomorphe dans un voisinage pointé de z_0, elle est continue. Si elle tend vers l'infini en z_0, il existe un voisinage pointé de z_0 sur lequel elle est holomorphe et non nul. La fonction $1/f$ est alors holomorphe sur ce voisinage pointé, et elle tend vers 0 en z_0. Donc, il existe un entier strictement positif n_0 tel que

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{n_0} \cdot (b_{n_0} + b_{n_0+1}(z - z_0) + \cdots)$$

avec b_{n_0} non nul. Alors $(b_{n_0} + b_{n_0+z}(z - z_0) + \cdots)^{-1}$ est holomorphe en z_0, et y admet donc un développement analytique. Donc f admet un développement en série de Laurent ayant au plus n_0 termes de puissance négative. L'entier n_0 ainsi obtenu s'appelle l'ordre du pôle.

On dit qu'une fonction f est méromorphe dans $\overline{\mathbf{C}}$ si ses seules singularités sont des pôles. On dit qu'elle est entière si elle n'a pas de point singulier fini.

Théorème des résidus

Soit f une fonction, et z_0 un point singulier isolé de f. Soit r un réel suffisamment petit pour que f soit holomorphe sur le disque de rayon r privé de son centre z_0. Alors l'intégrale de f le long du cercle de rayon r et de centre z_0, divisée par $2\pi i$, est indépendante de r, et s'appelle *résidu* de f au point z_0 :

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z.$$

La formule de Cauchy donne alors le théorème fondamental suivant :

Théorème (des résidus). — ***Si f est holomorphe sur un domaine D sauf en un ensemble de points singuliers isolés, et G est un ensemble d'adhérence incluse dans D, dont le bord ∂G ne contient pas de point singulier, et est orienté dans le sens indirect, alors***

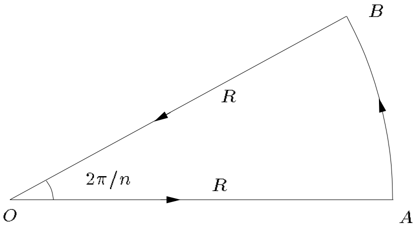
$$\int_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{t \textit{ singulier}} \mathrm{Res}_t(f).$$

Ce théorème découle directement du théorème de Cauchy. Étudions quelques méthodes de calcul de résidus avant de voir une application de ce théorème.

Tout d'abord, en intégrant terme à terme la série de Laurent de f en z_0, on vérifie que son résidu en ce point vaut c_{-1}. En particulier, en un point singulier éliminable, le résidu est nul. Mais si z_0 est un pôle d'ordre n_0, alors $f(z) \cdot (z - z_0)^{n_0}$ est une série entière. Si on dérive cette expression $n - 1$ fois, on obtient toujours une série entière, dont le coefficient constant vaut $(n-1)! \cdot c_{-1}$. On obtient donc la formule suivante :

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z)\right).$$

Appliquons maintenant ce résultat au calcul de l'intégrale de $f_n(z) = (1+z^n)^{-1}$ entre 0 et ∞ On supposera $n \geqslant 2$. Les singularités de f sont des pôles simples : ce sont les racines n-ièmes de -1. Considérons le chemin suivant :



Le résidu de f en $e^{i\pi/n}$ vaut

$$\operatorname{Res}_{e^{i\pi/n}}(f) = \lim_{z \to e^{i\pi/n}} \frac{z - e^{i\pi/n}}{1+z^n}.$$

Un rapide calcul permet de montrer que ce résidu vaut $-e^{2i\pi/n}/n$. En orientant ce chemin dans le sens direct, *i.e.*en changeant le signe dans le théorème des résidus, on obtient finalement que l'intégrale sur le chemin ci-dessus est égale à $2i\pi e^{2i\pi/n}/n$. Or lorsque R va tendre vers l'infini, l'intégrale sur l'arc AB va tendre vers 0, puisque la longueur de l'arc vaut $2\pi R/n$, et f sera majorée en module par $1/(R^n-1)$ lorsque R sera supérieur à 2 – par exemple. Par ailleurs, un changement de variable sur le segment BO nous donne que l'intégrale de f sur BO est égale à l'intégrale est OA multipliée par $-e^{2i\pi/n}$. D'où, en faisant tendre R vers l'infini :

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \cdot \sin(\pi/n)}.$$

Théorème de Rouché – Principe du maximum du module

Le théorème des résidus n'a pas que des applications calculatoires. Il permet de déduire encore quelques propriétés intéressantes des fonctions holomorphes. Nous supposerons ici construite la fonction « logarithme complexe », qui est définie sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, qui vérifie $\mathrm{Ln}(\mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta}) = \ln(\mathrm{r}) + \mathrm{i}\theta$. Cette fonction est holomorphe sur son ensemble de définition, et sa dérivée est

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Ln}(z))}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}.$$

Cette construction sera détaillée à la page 26, lorsque nous aurons étudié les prolongements analytiques.

Forts de ces considérations, commençons par un premier résultat :

Théorème (principe de l'argument). — ***Soient f une fonction méromorphe dans un domaine D, et G un domaine dont l'adhérence est dans D, dont la frontière est continue et ne contient aucun zéro et aucun pôle de f. On appelle N le nombre de zéros de f dans G, et P le nombre de pôles – tous deux calculés en tenant compte de l'ordre de multiplicité. Dans ces conditions, on a***

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$$

où ∂G est orienté dans le sens direct.

Essayons tout d'abord de caractériser l'ordre d'un zéro ou d'un pôle. On appelle *résidu logarithmique* de f en a le résidu de f'/f en a. La fonction f ne peut présenter un résidu logarithmique non nul qu'en ses pôles ou ses zéros. En effet, f'/f est la dérivée de Ln(f), qui est holomorphe en dehors des pôles et des zéros de f.

Soit alors z_0 en zéro d'ordre n de f. Alors dans un voisinage U_{z_0} de z_0, on peut écrire $f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$, avec φ holomorphe et non nul sur U_{z_0}. Dans ces conditions, un calcul assez simple aboutit à l'égalité suivante :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z-z_0)\varphi(z)}{\varphi(z)}.$$

Le deuxième terme est holomorphe, donc développable en série entière, et son terme constant sera n. Les autres termes seront d'intégrale nulle, et donc en prenant le résidu, on obtient que le résidu logarithmique de f en un zéro d'ordre n vaut exactement n. On peut montrer un résultat équivalent pour l'ordre p d'un pôle : soit z_1 un pôle d'ordre p. Alors la fonction $g = 1/f$ présente en z_1 un zéro d'ordre p. Par ailleurs, f'/f est égal à l'opposé de la dérivée logarithmique de g, donc le résidu logarithmique de f en z_1 est l'opposé du résidu logarithmique de g en z_1. Comme z_1 est un zéro d'ordre p de g, on obtient que l'ordre d'un pôle z_1 d'une fonction méromorphe est l'opposé du résidu logarithmique de cette fonction en z_1.

Tout cela va nous permettre de conclure : si G est un domaine dont l'adhérence est incluse dans D, la fonction f ne peut contenir qu'un nombre fini de zéros et de pôles. Comme le bord de G ne contient ni zéro, ni pôle, f'/f y est holomorphe. On peut appliquer le théorème des résidus : l'intégrale de f'/f vaut la somme des résidus logarithmiques de f à l'intérieur de G, à un coefficient multiplicatif $2\pi i$ près. Le résultat en découle.

On en déduit alors facilement le résultat suivant :

Théorème (Rouché). — ***Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans un fermé connexe D dont la frontière est continue, et telles que $|f(z)| > |g(z)|$ quel que soit z sur la frontière de D. Alors f et $f+g$ possèdent le même nombre de zéros dans D***

Si $f+g$ s'annulait sur la frontière, alors on aurait en un point l'égalité de leur module. Ce n'est donc pas le cas. De même, comme $|f| > |g| \geqslant 0$, f ne s'annule pas. Donc, on peut écrire $f + g = f(1 + g/f)$, et en calculer le résidu logarithmique. On obtient facilement que ce résidu logarithmique pour $f + g$ est la somme de celui de f et de celui de $1 + g/f$. Par ailleurs, $1 + g/f$ n'a pas de pôle, et n'a pas de zéro, puisque $|g/f| < 1$. Donc, son résidu logarithmique est nul, et on a égalité des résidus logarithmiques de $f + g$ et de f. Comme ces deux fonctions n'ont pas de pôles, elles ont le même nombre de zéros.

Ce résultat a un corollaire intéressant, bien que tout à fait différent :

Théorème (D'Alembert). — ***Un polynôme complexe de degré n admet exactement n racines dans $\mathbf{C}$.***

Soit $P(X) = a_n X^n + Q(X)$, où Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Comme P ne possède qu'un pôle, situé à l'infini, les boules de centre 0 et de rayon R ne contiennent pas de pôle. Comme Q est de degré strictement inférieur à n, on peut, en augmentant R, supposer que sur le cercle de centre 0 et de rayon R, on a $|a_n X^n|$ est supérieure à $|Q(X)|$. On en déduit que P a autant de zéros que $a_n X^n$ dans le disque de rayon R. Il suffit alors de prendre R supérieur à $|a_n|^{1/n}$ pour obtenir que P est scindé.

Le théorème de Rouché va nous permettre de montrer le résultat suivant, très important, connu sous le nom de principe de conservation du domaine.

Théorème. — ***Si une fonction f est holomorphe et non identiquement constante dans un domaine D, alors l'image D' de D par f est un domaine***

Rappelons qu'un domaine est un ouvert connexe. Il faut donc montrer que D' possède ces deux propriétés. Rappelons également que la connexité par arcs entraîne la connexité, mais que la réciproque n'est vraie que pour des ensembles ouverts.

La connexité se montre alors assez facilement : on va montrer que D' est connexe par arcs. Soient z_1' et z_2' deux éléments de D', et z_1 et z_2 des antécédents respectifs. Alors dans D, connexe par arcs, il existe un chemin γ reliant z_1 à z_2. L'image de γ par f est un chemin, puisque f est continue, et relie z_1' à z_2'.

Soit maintenant z_0' un point de D', et z_0 un antécédent. Il existe un réel non nul r tel que $B_{z_0,r}$ soit incluse dans D. De plus, on peut choisir r suffisamment petit pour que le seul point de cette boule qui ait pour image z_0' soit z_0 : en effet, le contraire signifierait que z_0 est un point d'accumulation des zéros de $f - f(z_0)$, et donc que f serait constante, égale à $f(z_0)$. On choisit donc un tel r, et on considère le cercle γ ce centre z_0 et de rayon r. On note m le minimum de $|f(z) - z_0'|$ sur γ. Il est non nul, d'après le choix de r, et par continuité de $f - z_0'$. Nous allons montrer que la boule de centre z_0' et de rayon m est incluse dans D', ce qui achèvera la démonstration. Soit z_1' un point de cette boule. Pour tout z appartenant à γ, $f(z) - z_1' = f(z) - z_0' + z_0' - z_1'$. Le module de $f(z) - z_0'$ est supérieur à m, et celui de $z_0' - z_1'$ est strictement inférieur à m. On peut alors appliquer le théorème de Rouché. Comme $f(z) - z_0'$ s'annule une fois sur la boule $B_{z_0,r}$, $f(z) - z_1'$ s'y annule une fois aussi, donc z_1' appartient à D'.

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Théorème (principe du module maximum). — ***Si f est holomorphe dans un domaine D, et si $|f|$ atteint un maximum local en un point de D, alors f est constante.***

En effet, si $|f|$ atteint son maximum en z_0, alors l'image de D par f contient un voisinage de $f(z_0)$, donc un point dont le module est strictement supérieur à celui de $f(z_0)$. C'est absurde.

Que dire des fonctions de plusieurs variables ?

Tout ce qui a été fait ici ne concerne que les fonctions d'une variable. On peut bien entendu définir la notion de fonction holomorphe pour des fonctions de plusieurs variables.

Soit f une fonction de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$. Soit z_0 et h deux éléments de $\mathbf{C}^n$. La fonction f est holomorphe en z_0 s'il existe une application $\mathbf{C}$-linéaire l telle que $f(z_0 + h) = f(z_0) + l(h) + o(h)$, de sorte que $o(h)/h$ tende vers 0 lorsque h tend vers 0.

La formule de Cauchy reste valable, pour peu que l'on arrange correctement son écriture : on note $U_{(a_i),(r_i)}$, ou plus simplement $U_{a,r}$, l'ensemble des n-uplets de complexes $(z_i)_i$ tels que pour tout i on ait $|z_i - a_i| < r_i$. Le squelette de $U_{a,r}$ est l'ensemble $\Gamma_{a,r}$ des n-uplets de complexes vérifiant $|z_i - a_i| < r_i$ pour tout i. Par ailleurs, si $k = (k_i)$ est un élément de $\mathbf{N}^n$, on note $|k|$ la somme des k_i, et, pour $z = (z_i)$ dans $\mathbf{C}^n$, on note z^k le produit $\prod_i z_i^{k_i}$.

Dans ces conditions, si f est holomorphe dans $U_{a,r}$, et continue sur $\overline{U_{a,r}}$, on a, pour tout $z \in U$:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(t)}{(t-z)^k} \mathrm{d}t.$$

Une fonction holomorphe en plusieurs variables est également développable en série entière. Avec les mêmes notations que précédemment, et avec les mêmes hypothèses, on a

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

avec

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(t)}{(t-a)^k} \mathrm{d}t.$$

Enfin, on a le théorème fondamental suivant :

Théorème (Hartogs). — ***Si f est holomorphe par rapport à chacune de ses variables en tout point d'un domaine D de $\mathbf{C}^n$, alors f est holomorphe – au sens des fonctions de plusieurs variables – sur le domaine D.***

Donc, l'équivalence entre l'holomorphie et l'analyticité est toujours vraie pour les fonctions de plusieurs variables.

Prolongements analytiques

Certaines fonctions holomorphes possèdent une définition naturelle sur un certain domaine, par exemple :

$$\mathrm{Ln}(1-\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{z})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}} \text{ pour } |\mathrm{z}| < 1.$$

Le problème qui se pose alors est de parvenir à étendre ces fonctions à des domaines plus grands tout en conservant leurs propriétés essentielles. Une méthode simple (du moins dans son principe) consiste à chercher à prolonger « progressivement » la fonction le long de chemins, la contrepartie étant que l'on perd le caractère univalent des fonctions (dans le cas où deux chemins non homotopes relient deux points).

Prolongements analytiques le long d'un chemin

Commençons par quelques définitions : un *élément de fonction* est un couple (D, f) où D est un domaine de $\mathbf{C}$ et $f : M \to \mathbf{C}$ est une fonction définie sur un ensemble $M \subset \mathbf{C}$ contenant D et holomorphe dans D. Si (D, f) est un élément de fonction et si $a \in D$, on appelle *germe* de (D, f) en a et on note $[(D, f)]_a$ l'ensemble des éléments de fonction (G, g) vérifiant la condition suivante : $a \in G$ et il existe un voisinage V de a contenu dans $D \cap G$ tel que $f_{|V} = g_{|V}$.

Avec ces définitions, les constatations suivantes sont immédiates :

- si (D, f) est un élément de fonction et si D' est un domaine de $\mathbf{C}$ contenu dans D, alors pour $a \in D'$ on a $[(D, f)]_a = [(D', f)]_a$,
- si (D, f) et (D', f) sont deux éléments de fonctions et si $a \in D \cap D'$, alors $[(D, f)]_a = [(D', f)]_a$,
- si (D, f) et (G, g) sont deux éléments de fonctions et si $a \in D \cap G$, alors $(G, g) \in [(D, f)]_a$ si et seulement si $(D, f) \in [(G, g)]_a$,

la deuxième remarque nous permet donc de définir le germe de f en a pour f holomorphe au voisinage de a que l'on notera $[f]_a$.

Nous pouvons maintenant définir la notion de prolongement analytique : soient (D_0, f_0) un élément de fonction et $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ un chemin. On appelle *prolongement analytique* de (D_0, f_0) le long de γ toute famille d'éléments de fonction $(D_t, f_t)_{t \in]0,1]}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) si $t \in [0, 1]$, alors $\gamma(t) \in D_t$,

ii) si $t \in [0, 1]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0, 1]$ avec $|s - t| < \delta$ on ait $\gamma(s) \in D_t$ et $[f_s]_{\gamma(t)} = [f_t]_{\gamma(s)}$.

On dira alors que (D_1, f_1) est obtenu par prolongement analytique de (D_0, f_0) le long de γ.

Le théorème suivant est un résultat d'unicité du prolongement analytique, du moins en termes de germes de fonctions.

Théorème. — ***Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ un chemin de $\mathbf{C}$, soient (D_0, f_0) et (G_0, g_0) deux éléments de fonctions et soient $(D_t, f_t)_{t \in]0,1]}$ et $(G_t, g_t)_{t \in]0,1]}$ prolongements analytiques de (D_0, f_0) et (G_0, g_0) le long de γ, on pose $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors si $[f_0]_a = [g_0]_a$, on a $[f_1]_b = [g_1]_b$.***

Montrons ce résultat. On pose

$$T = \{t \in [0,1] | [f_t]_{\gamma(t)} = [g_t]_{\gamma(t)}\}.$$

Soit $t \in T$ et soit U un domaine de $\mathbf{C}$ tel que $U \subset D_t \cap G_t$, $\gamma(t) \in U$ et $f_{t|U} = g_{t|U}$. Alors par définition du prolongement analytique il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0,1]$ avec $|t-s| < \delta$ on ait $\gamma(s) \in U$ et :

$$\begin{aligned} &[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)} \\ &[g_s]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}. \end{aligned}$$

Mais comme $f_{t|U} = g_{t|U}$, on en déduit que $[f_t]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}$ et donc que $[f_s]_{\gamma(s)} = [g_s]_{\gamma(s)}$, ce qui montre que T est ouvert. Soit maintenant t un point adhérent à T et soit $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0,1]$ avec $|t-s| < \delta$ on ait :

$$\begin{aligned} &\gamma(s) \in D_t \cap G_t \\ &[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)} \\ &[g_s]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}. \end{aligned}$$

Il existe alors $s \in T$ tel que $|t-s| < \delta$, on a donc $[f_s]_{\gamma(s)} = [g_s]_{\gamma(s)}$ et par suite $[f_t]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}$. Par conséquent (d'après le théorème d'unicité), on a $[f_t]_{\gamma(t)} = [g_t]_{\gamma(t)}$ et T est fermé. Comme de plus T est non vide (contient 0) et $[0,1]$ est connexe, on en déduit que $T = [0,1]$, ce qui termine la preuve.

Ce résultat nous permet de poser les définitions suivantes : Si (D_0, f_0) est un élément de fonction dont $(D_t, f_t)_{t \in]0,1]}$ est un prolongement analytique le long d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$, le germe de f_1 en $\gamma(1)$ est appelé *prolongement analytique* du germe de f_0 en $\gamma(0)$ le long de γ. On appelle *fonction analytique complète obtenue à partir de* (D_0, f_0) l'ensemble des germes de fonctions $[g]_b$ tels qu'il existe $a \in D_0$ et un chemin γ de a à b pour lesquels $[g]_b$ est le prolongement analytique de $[f_0]_a$ le long de γ. Finalement, on appelle *fonction analytique complète* tout ensemble de germes de fonctions qui est la fonction analytique complète obtenue à partir d'un élément de fonction (D, f).

Théorème de monodromie

On va ici démontrer un résultat d'unicité du prolongement. L'existence d'un tel prolongement sera démontrée au cas par cas. Commençons par deux résultats intermédiaires.

Proposition. — *Soient $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ un chemin et soit $(D_t, f_t)_{t \in]0,1]}$ un prolongement analytique de l'élément de fonction (D_0, f_0) le long de γ. Pour tout $t \in [0,1]$, on note $R(t)$ le rayon de convergence du développement en série entière de f_t au point $\gamma(t)$. alors soit R est identiquement égal à $+\infty$ sur $[0,1]$ soit R est une application continue de $[0,1]$ dans $]0,+\infty[$.*

En effet, s'il existe un t pour lequel $R(t) = +\infty$, alors f_t peut être prolongée en une fonction entière f. Pour tout $s \in [0,1]$, (D_s, f_s) peut alors être obtenue par prolongement analytique de f le long d'une partie de γ et par conséquent $[f_s]_{\gamma(s)} = [f]_{\gamma(s)}$, ce qui montre que $R(s) = +\infty$. Si maintenant R est à valeurs réelles, pour tout $t \in [0,1]$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0,1]$ avec $|t-s| < \delta$ on ait :

$$\begin{aligned} &\gamma(s) \in D_t \cap D(a, R(t)) \\ &[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}. \end{aligned}$$

Pour un tel s, on pose alors $b = \gamma(s)$ et comme $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$, on en déduit que le rayon de convergence du développement en série entière de f_s en $\gamma(s)$ doit être au moins égal à $R(t) - |\gamma(t) - \gamma(s)|$, donc :

$$R(t) - R(s) \leqslant |\gamma(s) - \gamma(t)|.$$

De la même manière on montrerait que :

$$R(s) - R(t) \leqslant |\gamma(s) - \gamma(t)|.$$

La continuité de R est alors conséquence de celle de γ.

Proposition. — *Soit γ un chemin de a à b et soit $(D_t, f_t)_{t \in [0,1]}$ un prolongement analytique le long de γ. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout chemin σ de a à b vérifiant $|\gamma(t) - \sigma(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t \in [0,1]$ et pour tout prolongement analytique $(G_t, g_t)_{t \in [0,1]}$ vérifiant $[g_0]_a = [f_0]_a$ on ait $[g_1]_a = [f_1]_a$.*

Prouvons ce résultat : pour tout $t \in [0,1]$, on note $R(t)$ le rayon de convergence du développement en série entière de f_t au point $\gamma(t)$; d'après la proposition précédente, soit R est constant égal à $+\infty$, et dans ce cas tout $\varepsilon > 0$ convient, soit R est une fonction continue à valeurs réelles strictement positives et définie sur le compact $[0,1]$, elle atteint alors son minimum et on peut trouver ε tel que :

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{R(t) | t \in [0,1]\}.$$

Soient alors σ un chemin de a à b et $(G_t, g_t)_{t \in [0,1]}$ un prolongement analytique le long de σ vérifiant :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0,1]. |\gamma(t) - \sigma(t)| < \varepsilon \\ &[g_0]_a = [f_0]_a. \end{aligned}$$

On suppose de plus que pour tout $t \in [0,1]$ D_t est le disque ouvert de centre $\gamma(t)$ et de rayon $R(t)$. Remarquons par ailleurs que pour tout t on a $|\sigma(t) - \gamma(t)| < \varepsilon < R(t)$, on pose alors :

$$T = \{t \in [0,1] | \forall z \in G_t \cap D_t . f_t(z) = g_t(z)\}.$$

Soit $t \in T$ et soit $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0,1]$ avec $|s-t| < \delta$ on ait :

$$\begin{array}{l} |\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon \\ [f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)} \\ |\sigma(s) - \sigma(t)| < \varepsilon \\ [g_s]_{\sigma(s)} = [g_t]_{\sigma(t)} \\ \sigma(s) \in G_t. \end{array}$$

Pour un tel s, on a alors $|\sigma(s) - \gamma(s)| < \varepsilon < R(s)$ et par conséquent $\sigma(s) \in D_s$. De la même manière, on a $|\sigma(s) - \gamma(t)| < 2\varepsilon < R(t)$ et donc $\sigma(s) \in D_t$. On en déduit que $G_s \cap G_t \cap D_s \cap D_t$ est un ouvert non vide et par conséquent f_t et g_t coïncident sur cet ouvert. Comme par ailleurs f_s coïncide avec f_t et g_s coïncide avec g_t sur cet ouvert, on a finalement $s \in T$ et T est ouvert. On montre de même que T est fermé. Comme T est clairement non vide (contient 0), on a finalement $T = [0,1]$, d'où le résultat.

Soient (D,f) un élément de fonction et G un domaine contenant D. On dit que (D,f) admet un *prolongement analytique complet* dans G si, pour tout chemin γ d'un point de D vers un point de G, il existe un prolongement analytique de (D,f) le long de γ. On peut désormais énoncer et démontrer le théorème suivant :

Théorème (de monodromie). — ***Soient** (D,f) **un élément de fonction et** G **un domaine contenant** D **tels que** (D,f) **admette un prolongement analytique complet dans** G**. Si** $a \in D$ **et** $b \in G$ **et si** γ **et** σ **sont deux chemins de** a **à** b **contenus dans** G**, homotopes relativement aux extrémités et si** $(D_t, f_t)_{t\in[0,1]}$ **et** $(G_t, g_t)_{t\in[0,1]}$ **sont des prolongement analytiques de** (D,f) **le long de** γ **et** σ**, alors** $[f_1]_b = [g_1]_b$**.***

Pour prouver ce résultat, prenons $\Gamma : [0,1]^2 \to G$ telle que :

$$\begin{array}{l} \forall t \in [0,1].\Gamma(t,0) = \gamma(t) \text{ et } \Gamma(t,1) = \sigma(t) \\ \forall u \in [0,1].\Gamma(0,u) = a \text{ et } \Gamma(1,u) = b. \end{array}$$

Pour tout $u \in [0,1]$ on note γ_u le chemin défini par $\gamma_u(t) = \Gamma(t,u)$ pour $t \in [0,1]$. Par hypothèse, il existe alors un prolongement analytique de (D,f) le long de γ_u que l'on note $(D_{t,u}, H_{t,u})_{t\in[0,1]}$. On sait déj'a que $[g_1]_b = [h_{1,1}]_b$ et $[f_1]_b = [h_{1,0}]_b$. On pose alors :

$$U = \{u \in [0,1] | [h_{1,u}]_b = [h_{1,0}]_b\}$$

Soit $u \in [0,1]$, et soit ε la constante fournie par le lemme précédent relativement à γ_u. Comme Γ est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $v \in [0,1]$,

$$|u-v| < \delta \Rightarrow (\forall t \in [0,1].|\gamma_u(t) - \gamma_v(t)| < \varepsilon).$$

On a alors pour un tel v $[h_{1,u}]_b = [h_{1,v}]_b$. Dans le cas où $u \in U$, on a alors $]u-\delta, u+\delta[\subset U$ ce qui montre que U est ouvert. Dans le cas où $u \in \bar{U}$, il existe $v \in U$ tel que $|u-v| < \delta$ et on a $[h_{1,u}]_b = [h_{1,v}]_b = [h_{1,0}]_b$ ce qui montre que $u \in U$. Par conséquent U est à la fois ouvert et fermé et comme il est clairement non vide, on en déduit que $U = [0,1]$, ce qui est le résultat voulu.

Corollaire. — *Soit (D,f) un élément de fonction admettant un prolongement analytique complet dans un domaine simplement connexe G; il existe alors une fonction holomorphe $F : G \to \mathbf{C}$ telle que $F_{|D} = f$.*

En effet, soit $a \in D$; pour tout $z \in G$, pour tout chemin γ de G allant de a à z, et pour tout prolongement analytique de f le long de γ $(D_t, f_t)_{t\in[0,1]}$, on pose $F(z) = f_1(z)$ (cette quantité est indépendante du choix de γ et du prolongement analytique, d'après les résultats qui précèdent). Comme par ailleurs on a $F(w) = f_1(w)$ au voisinage de z, on en déduit que F est holomorphe.

Fonctions analytiques complètes

On appelle *fonction analytique complète* tout ensemble $\mathcal{F}$ qui est le prolongement analytique complet d'un élément de fonction $F = (D,f)$. L'ensemble $G = \cup_{(D,f)\in\mathcal{F}} D$ est alors un domaine de $\mathbf{C}$ appelé domaine de la fonction analytique complète $\mathcal{F}$.

Remarque. — $\mathcal{F}$ ne dépend pas de l'élément de fonction $(D,f) \in \mathcal{F}$ ni du point $a \in D$ choisi pour origine des chemins. De plus, d'après le théorème d'unicité du prolongement le long d'un chemin, deux fonctions analytiques complètes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales si et seulement si elles possèdent au moins un élément commun.

Le problème des « fonctions » analytiques complètes ainsi définies est qu'elles peuvent être multivalentes, en ce sens que pour un élément $x \in G$ il peut exister des éléments de fonctions $(U,f), (V,g) \in \mathcal{F}$ tels que $x \in U, x \in V$ et $f(x) \neq g(x)$. Il est évident d'après le théorème de monodromie que l'on peut toujours associer à $\mathcal{F}$ une fonction univalente holomorphe dans le cas où D est simplement connexe. Pour donner à $\mathcal{F}$ un caractère univalent, on introduit la notion de surface de Riemann, c'est un espace topologique sur lequel $\mathcal{F}$ induit naturellement une fonction. On va de plus munir les surfaces de Riemann d'une structure analytique (analogue à la structure de variété différentiable) qui permettra à $\mathcal{F}$ de garder son caractère holomorphe (du moins en un certain sens).

Surfaces de Riemann

Définissons donc la notion de surface de Riemann : si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, on notera $\mathcal{S}(U)$ l'ensemble des couples $(z, [f]_z)$ où $z \in U$ et f est une fonction définie et holomorphe au voisinage de z. On a alors une application de projection :

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{S}(U) & \to & \mathbf{C} \\ & (z, [f]_z) & \mapsto & z \end{array}$$

Le couple $(\mathcal{S}(U), \rho)$ est appelé *faisceau des germes des fonctions analytiques de* U. Pour tout $z \in U$, $\rho^{-1}(z)$ est appelé la *fibre* de z et U est appelé *espace de base* du faisceau. Pour tout élément de fonction (D, f), on définit :

$$N(D, f) = \{(z, [g]_z) \in \mathcal{S}(U) | z \in D \text{ et } [g]_z = [f]_z\}$$

et pour tout $(z, [f]_z) \in \mathcal{S}(U)$ on pose :

$$\mathcal{N}(z, [f]_z) = \{N(D, g) | z \in D \text{ et } [g]_z = [f]_z\}.$$

Ces définitions nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — ***On a les résultats suivants :***

i) $\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{S}(U) | \forall (z, [f]_z) \in \mathcal{U}, \exists N \in \mathcal{N}(z, [f]_z) : N \subset \mathcal{U}\}$ ***définit une topologie sur*** $\mathcal{S}(U)$ ***pour laquelle les*** $\mathcal{N}(z, [f]_z)$ ***sont des bases de voisinages,***

ii) ***muni de cette topologie,*** $\mathcal{S}(U)$ ***est séparé et localement connexe par arcs (*****i.e.*****: tout point possède un voisinage connexe par arcs),***

iii) ***l'application*** ρ ***est continue.***

Ce théorème ne sera pas démontré ici; il fait essentiellement intervenir des notions de topologie. La démonstration se trouve par exemple dans [Co]. Il nous permet cependant de définir ce qu'est une surface de Riemann : si $\mathcal{F}$ est une fonction analytique complète de domaine G, on définit

$$\mathcal{R} = \{(z, [f]_z) \in \mathcal{S}(G) | [g]_z \in \mathcal{F}\}.$$

Le couple $(\mathcal{R}, \rho)$ est alors appelé *surface de Riemann* de $\mathcal{F}$.

Théorème. — ***Soit*** $\mathcal{F}$ ***une fonction analytique complète d'espace de base*** G ***et soit*** $(\mathcal{R}, \rho)$ ***sa surface de Riemann. L'application*** $\rho: \mathcal{R} \to G$ ***est alors une application ouverte (*****i.e.*****les images des ouverts sont des ouverts), continue, et pour tout*** $(a, [f]_a) \in \mathcal{R}$***, il existe un voisinage de*** $(a, [f]_a)$ ***de la forme*** $N(D, f)$ ***tel que*** ρ ***induise un homéomorphisme de*** $N(D, F)$ ***sur un dique ouvert de*** $\mathbf{C}$.

En effet, comme $\rho: \mathcal{S}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ est continue, la restriction de ρ à $\mathcal{R}$ et G est continue. Par ailleurs, un ouvert de la forme $N(U, f)$ est envoyé sur U qui est aussi un ouvert, donc ρ est ouverte. Finalement, pour tout $(a, [f]_a) \in \mathcal{R}$, il existe un disque D tel que $(D, F) \in [f]_a$ et ρ induit une application continue, ouverte et surjective de $N(D, f)$ sur D. Or pour tous $(x, [f]_x), (y, [f]_y) \in N(D, f)$ on a $x \neq y$ ce qui montre que la restriction de ρ à $N(D, f)$ est injective, d'où le résultat.

En conséquence, il sera utile d'introduire la définition suivante : si X est un espace topologique, on appelle *carte* de X tout couple (U, φ) où U est un ouvert de X et φ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbf{C}$. On appelle *surface analytique* tout couple (X, Φ) où X est un espace topologique et Φ est un ensemble de cartes de X vérifiant les conditions suivantes :

i) pour tout $x \in X$, il existe $(U, \varphi) \in \Phi$ telle que $x \in U$,

ii) pour tous $(U, \varphi), (V\psi) \in \Phi$ tels que $U \cap V \neq \varnothing$, l'application $\varphi \circ \psi^{-1}$ est une fonction holomorphe de $\psi(U \cap V)$ dans $\varphi(U \cap V)$.

On a alors immédiatement le résultat suivant :

Théorème. — ***Si*** $(\mathcal{R}, \rho)$ ***est la surface de Riemann d'une fonction analytique complète*** $\mathcal{F}$ ***on note*** Φ ***l'ensemble des couples*** $(U, \rho|_U^{\rho(U)})$ ***où*** U ***est un ouvert de*** $\mathcal{R}$ ***et*** ρ ***induit une bijection de*** U ***sur*** $\rho(U)$, $(\mathcal{R}, \Phi)$ ***est alors une surface analytique.***

Munissons maintenant les surfaces analytiques d'une structure différentielle, afin de revenir à la notion de fonctions holomorphes.

Soient (X, Φ) et (Y, Ψ) deux surfaces analytiques et soit $f : X \to Y$ une application continue. Soit $x \in X$, on dit que f est holomorphe en x si et seulement si il existe une carte $(U, \varphi) \in \Phi$ et une carte $(V, \psi) \in \Psi$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $x \in U$,

ii) $f(U) \subset V$

iii) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ définie sur $\varphi(U)$ est une fonction holomorphe.

On est alors rassuré d'avoir le théorème suivant :

Théorème. — ***Soit $\mathcal{F}$ une fonction analytique complète de surface de Riemann $(\mathcal{R}, \rho)$, on définit :***

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathcal{R} & \to & \mathbf{C} \\ & (z, [f]_z) & \mapsto & f(z) \end{array}$$

$\mathcal{F}$ est alors une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}$.

Soit en effet $\alpha = (a, [f]_a) \in \mathcal{R}$. On sait qu'il existe $N(D, f)$ voisinage de α tel que ρ induise un homéomorphisme de $N(D, f)$ sur un dique de $\mathbf{C}$. Le couple $(N(D, f), \rho)$ est alors une carte de $\mathcal{R}$ contenant α, on note ρ^1 l'inverse de l'homéomophisme induit par ρ et pour $z \in \rho(N(D, f)) = D$ on a :

$$\mathcal{F} \circ \rho^{-1}(z) = \mathcal{F}(z, [f]_z) = f(z)$$

qui est holomorphe.

Généralisation du cas complexe

Une fois définie la notion de fonction holomorphe sur une surface analytique, on peut obtenir des généralisations des théorèmes concernant les fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Théorème. — ***Soient (X, Φ) et (Y, Ψ) des surfaces analytiques et soient f et g deux fonctions holomorphes de X dans Y, alors si l'ensemble $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ possède un point d'accumulation, on a $f = g$.***

Théorème (Liouville). — ***Si (X, Φ) est une surface analytique compacte, il n'existe pas de fonction holomorphe sur X qui ne soit pas constante.***

Exemples de prolongements analytiques

Racines n-ièmes : pour $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbf{C}$ noté sous la forme $re^{i\varphi}$ avec $\varphi \in]-\pi, \pi[$, on pose $f_0(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}$. Cette fonction est continue dans $D_0 = \overline{\mathbf{C}} \smallsetminus \mathbf{R}_-$ et on prouve qu'elle est holomorphe avec le theorème de dérivation de l'application réciproque. On appelle alors racine n-ième l'application analytique complète obtenue par prolongement de l'élément de fonction (D_0, f_0). Plus précisément, si pour $\alpha \in \mathbf{R}$ on note D_α le domaine $\{re^{i\varphi} | -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ et si on pose $f_\alpha(re^{i\varphi}) = {}^n\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}$, les éléments (D_α, f_α) sont les prolongements de l'élément $D_0, f_0)$ et décrivent la fonction analytique racine n-ième qui a alors pour domaine $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0, \infty\}$. Remarquons finalement que pour tout z dans ce domaine, cette fonction associe à z n valeurs distinctes déduites les unes des autre par rotation de $\frac{2\pi}{n}$. D'après les remarques que l'on a déjà faites, on peut définir une détermination holomorphe de racine n-ième dans tout domaine simplement connexe de $\overline{\mathbf{C}}$ ne contenant pas les points 0 et ∞.

Le logarithme complexe : Considérons le domaine $D_0 = \{re^{i\varphi} \in \overline{\mathbf{C}} | -\pi < \varphi < \pi\}$ et la fonction f_0 définie sur ce domaine par $f_0(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$. On montre de la même manière que précédemment que (D_0, f_0) est un élément de fonction dont le prolongement analytique complet est appelé fonction logarithme. Pour décrire ce prolongement, on utilise les domaines D_α définis par :

$$D_\alpha = \{re^{i\varphi} \in \overline{\mathbf{C}} | -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$$

ainsi que les fonctions holomorphes $f_\alpha(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$. Le domaine de la fonction analytique complète obtenue est là encore $\mathbf{C}$ privé de 0. Ainsi, on peut définir une détermination de la fonction logarithme dans tout domaine simplement connexe de $\overline{\mathbf{C}}$ ne contenant ni 0 ni ∞. Remarquons pour finir que la dérivée du logarithme sera :

$$\mathrm{Ln}'(\mathrm{z}) = \frac{1}{\mathrm{z}}$$

mais on prendra garde au fait que certaines des propriétés du logarithme réel ne sont pas conservées (par exemple l'égalité $\mathrm{Ln(ab)} = \mathrm{Ln(a)} + \mathrm{Ln(b)}$ n'a pas lieu).

Pour en savoir plus...

[C$_1$] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe - fonctions de plusieurs variables*, Mir, 1984.

[C$_2$] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe - fonctions d'une variable*, Mir, 1984.

[Co] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag.

[DR] Gabriel Dos Reis, *Première rencontre avec PGL(2)*, Hubris (numéro 0) (1997).

[L] Serge Lang, *Complex analysis*, troisième ed., Springer-Verlag, 1992.

[ST] Ian Stewart and David Tall, *Complex analysis*, Cambridge University Press, 1983.

Petits problèmes

Nous vous proposons ici quelques problèmes que nous avons rencontrés, et pour lesquels, en général, nous n'avons pas de résultat satisfaisant. Vous pouvez nous soumettre vos résultats à l'adresse du journal : `hubris@rip.ens-cachan.fr`, afin que nous les publiions dans les numéros suivants.

N.M.

Un problème de densité

On montre assez facilement que l'ensemble $\{\sin n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans l'intervalle $[-1, 1]$. Cela résulte du fait que l'image par une fonction f continue (en l'occurence, le sinus) d'un espace dense (qui sera ici l'ensemble $\{p+2\pi q \mid (p,q) \in \mathbf{Z}^2\}$, qui est dense dans $\mathbf{R}$) est un ensemble dense dans l'image de f.

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si l'ensemble $\{n \cdot \sin n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$. La méthode précédente ne s'applique plus, puisque la fonction $x \mapsto x \cdot \sin x$ appliquée à $p + 2\pi q$ ne donne pas $p \sin p$. **N.M.**

« Le cheval et la rivière »

Ce problème est aussi une extension d'un problème connu : un cavalier, partant d'un point A, veut se rendre au point B. Mais « qui veut aller loin ménage sa monture », et il décide donc de passer par la rivière (rectiligne) afin d'y laisser son cheval se désaltérer. On suppose que notre cavalier peut passer à travers champs et se déplace donc où il veut. Son but étant de minimiser la distance parcourue, caractériser le point de la rivière où il va s'arrêter.

Ce problème a une solution simple : si on note B' le symétrique du point B par rapport à la rivière (rectiligne), si on connaît un chemin « minimal » de A à B', on obtient un chemin minimal de A à B en prenant le chemin de A à M puis le symétrique, par rapport à la rivière, du chemin de M à B'. Le plus court chemin entre deux points étant la ligne droite (on supposera que localement, la Terre est plate...), le lieu de la pause est l'intersection de la rivière et du segment reliant A à B'.

Le problème que l'on considère maintenant est le même, mais on suppose que la rivière est un cercle et que le cavalier se trouve à l'intérieur de ce cercle.

N.M.

Le problèmes des timbres

On considère un ensemble de $2k - 1$ timbres, de valeurs différentes deux à deux. Montrer que l'on peut en prendre un sous-ensemble contenant exactement k timbres, et dont la somme des valeurs soit un multiple de k. **N.M.**

Le problème des timbres (bis)

On considère un ensemble de timbres, dont les valeurs se situent dans un ensemble de k entiers, et dont le nombre est illimité pour chaque valeur. On peut alors montrer qu'à partir d'une certain entier, toutes les valeurs sont réalisables. Le problème est de le montrer, mais surtout d'exprimer l'entier minimal à partir duquel toutes les valeurs sont réalisables.

Par exemple, si on a un ensemble infini de timbres de trois francs et un ensemble infini de timbres de cinq francs, alors on peut réaliser toutes les valeurs à partir de huit francs. Mais sept francs n'est pas réalisable. **N.M.**

Les bagues de Suleima

Le fiancé de Suleima, orfèbvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve de son amour, de lui offrir chaque mois une bague en or différente, incrustée d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a dix pierres précieuse, régulièrement réparties, et se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte. Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ? **G.D.R.**

Composantes connexes

On note E un espace vectoriel réel de dimension n supérieure ou égale à 2, et $Q^*(E)$ l'espace des formes quadratiques non dégénérées sur E. Décrire les composantes connexes de $Q^*(E)$. **G.D.R.**

Livres

Ideals, varieties and algorithms,
D. Cox, J. Little, D. O'Shea,
Springer Verlag, 1992

Tout un chacun manipule avec dextérité les polynômes à une indéterminée, mais demeure souvent perplexe dès que leur nombre augmente. Il s'agit simplement de « calcul algébrique » (*computational algebra*) dans un anneau de polynômes $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ (qui est toujours factoriel mais plus principal si $n > 1$). Voici quelques-uns des problèmes que l'on se pose, que l'on aimerait savoir résoudre.

- Comment savoir si un polynôme est dans un idéal donné ?
- Peut-on implémenter simplement les opérations d'addition et de multiplication dans un quotient A/I ?
- Peut-on savoir si un système d'équations polynômiales possède un nombre fini de solutions ? Peut-on trouver ces solutions ?
- Si une variété est donnée par une paramétrisation, peut-on en déduire une équation implicite ?

L'idée de base est de généraliser l'algorithme de division euclidienne pour les polynômes à une indéterminée aux polynômes à plusieurs indéterminées. Plus précisément, considérons un polynôme g et un idéal $(f_1, \ldots, f_k)$, nous cherchons à écrire

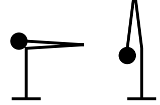
$$g = h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n + r.$$

Après avoir choisi un ordre sur les monômes (qui généralise l'ordre donné par le degré sur les monômes à une indéterminée : on prendra souvent l'ordre lexicographique, mais d'autres choix sont parfois plus judicieux), on peut reprendre l'algorithme de la division euclidienne. Malheureusement, les quotients h_i ne sont pas déterminés de manière unique. Par contre, dans certaines situations, le reste r est bien déterminé. C'est en particulier le cas si la famille $f_1, \ldots, f_n$ constitue une base de Gröbner.

Une *base de Gröbner* d'un idéal I est une famille génératrice finie dont les termes dominants (on a choisi un ordre monômial) engendrent l'idéal des termes dominants des éléments de I. Les bases de Gröbner existent et on peut les construire explicitement : si une famille de polynômes n'en est pas une, c'est qu'il existe une combinaison linéaire de deux éléments de cette famille dont les coefficients dominants se simplifient et dont le nouveau terme dominant ne soit pas dans l'idéal engendré par les termes dominants des éléments de notre famille. Il suffit donc de compléter la famille par ces combinaisons linéaires : ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes car l'anneau de polynômes A est noethérien. C'est l'*algorithme de Buchberger*. La base de Gröbner obtenue est généralement trop grosse : on peut se ramener à une base minimale en un certain sens, qui est alors unique. Si on s'intéresse à la complexité de l'algorithme, on a des frayeurs : en partant de polynômes de degré d, on peut se retrouver avec des polynômes de degré 2^{2^d}. Mais il ne s'agit que de la complexité en pire cas, on constate que généralement ça marche très bien.

Voyons maintenant quelques applications des bases de Gröbner. On cherche à résoudre un système d'équations polynômiales. Si les équations sont linéaires, on utilise le pivot de Gauss pour éliminer les inconnues une à une et il suffit de « remonter » : résoudre la dernière équation, puis l'avant-dernière et ainsi de suite. Pour les équations polynômiales, si l'on cherche une base de Gröbner (pour l'ordre lexicographique) de l'idéal engendré par nos équations, on obtient un système triangulaire. Mais attention, on n'est pas assuré de pouvoir remonter toutes les solutions : contrairement au cas linéaire, il arrive que des solutions de la dernière équation soient incompatibles avec les précédentes. Géométriquement, l'élimination s'interprète comme des morphismes de projection sur les hyperplans de coordonnées. Cette notion est aussi liée à celle de résultant.

Une application relativement concrète de la géométrie algébrique (et des bases de Gröbner) est la robotique. Considérons le bras d'un robot : l'espace de configuration de toutes les positions du bras est décrit par des équations polynômiales, c'est une variété algébrique. On peut s'intéresser à l'ensemble des positions que la main du robot peut atteindre, qui correspond à la projection de l'espace des configurations du bras sur celui de la main et à la manière dont elle peut atteindre ces positions. Certaines sont des *singularités* : il existe une direction dans laquelle on ne peut pas atteindre une position très voisine en ne bougeant que très peu.



Pour peu que le bras soit un tant soit peu compliqué, de telles singularités existent toujours.

Une autre application des bases de Gröbner est la démonstration automatique de théorèmes géométriques. Des conditions comme l'alignement ou la coplanéarité de points, l'égalité de distances ou d'angles, le parallélisme ou la perpendicularité, s'expriment avec des coordonnées sous forme d'équations polynômiales. Il suffit donc d'exprimer les hypothèses du problème et de voir si les conclusions sont dans l'idéal qu'elles engendrent. La situation est en fait beaucoup plus subtile : on cherche à démontrer un résultat de nature géométrique sur la variété des configurations correspondant aux hypothèses du problème. Or on n'a pas un dictionnaire parfait entre variétés affines et idéaux, mais seulement entre variétés affines (sur un corps algébriquement clos) et idéaux radicaux. Il s'agirait donc ici démontrer qu'une puissance du polynôme correspondant à la conclusion est dans l'idéal engendré par les hypothèses. (Je laisse le lecteur réfléchir à ce qui se passe sur $\mathbf{R}$, qui n'est pas algébriquement clos.)

Il existe un autre algorithme pour démontrer automatiquement des résultats géométriques : la *méthode de Wu*, antérieure aux bases de Gröbner mais dans le même esprit et souvent plus efficace.

La notion d'invariants est importante et difficile en géométrie algébrique. Nous nous intéressons ici aux sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n)$, *i.e.* aux groupes finis agissant sur l'espace affine k^n. Considérons l'anneau des polynômes invariants

$$k[x_1, \ldots, x_n]^G.$$

C'est une algèbre de type fini : on peut en donner un système de générateurs de la manière suivante. On prend les monômes de degré total inférieur à l'ordre du groupe et pour chacun d'entre eux, on fait la moyenne de son orbite (le groupe est fini et nous sommes en caractéristique nulle). À l'aide d'une base de Gröbner, on peut exprimer tout invariant en fonction de ces générateurs.

Si on prend l'action du groupe symétrique

$$k[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$$

tout polynôme invariant peut s'exprimer de manière unique comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires, *i.e.* les σ_i sont algébriquement indépendants. Que reste-t-il de cette unicité dans le cas général ? Considérons

$$k[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[f_1, \ldots, f_m].$$

On cherche les relations algébriques en les f_j, *i.e.* on regarde l'idéal des relations

$$I_F = \{h \in k[y_1, \ldots y_m] \ : \ h(f_1, \ldots, f_m) = 0\}.$$

On a un isomorphisme

$$k[y_1, \ldots y_m]/I_F \simeq k[x_1, \ldots, x_n]^G.$$

On peut calculer explicitement l'idéal I_F : il suffit (avec une base de Gröbner) d'éliminer les variables $x_1, \ldots, x_n$ dans les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

La variété affine associée à l'idéal I_F est indépendante (à isomorphisme près) du choix du système de générateurs et s'identifie à l'espace des orbites de l'action de G sur k^n (sur un corps algébriquement clos). On a dans cette situation unifié les trois moyens pour construire une algèbre : quotienter par un idéal, prendre l'anneau des invariants et prendre l'anneau des fonctions régulières sur une variété.

Le livre se conclut sur des notions de géométrie algébrique : la géométrie projective et la dimension d'une variété (qu'il définit d'ailleurs en *comptant* les monômes non contenus dans un idéal). Il constitue une introduction solide et claire aux techniques et applications des bases de Gröbner, au niveau de la maîtrise. **V.Z.**

Non standard analysis,
F. Diener and M. Diener editors,
Springer Verlag, 1995

La théorie des ensembles est une *théorie* (ce mot a un sens très précis en logique) définie par un prédicat (la relation d'appartenance $\in$) et une liste d'axiomes. On croit fermement que cette théorie est non-contradictoire. De même, l'analyse non-standard (ANS) est une théorie définie par la même chose plus un autre prédicat, « standard » (qui nous dit si un ensemble, ou un élément d'un ensemble, est « standard » : les objets que l'on rencontre en mathématique sont standard, les autres, par exemple les infiniment petits, sont non-standard), et les trois axiomes suivants.

Transfert : Pour démontrer quelque-chose d'*interne* (*i.e.*, ne faisant pas intervenir le prédicat « standard »), il suffit de le démontrer pour les éléments standard.

Idéalisation : Il existe un ensemble fini qui contient tous les ensembles standard. En particulier, il y a des infiniment grands dans $\mathbf{N}$, *i.e.*, des entiers plus grands que tout entier standard. En particulier, il y a des infiniment grands et des infiniment petits dans $\mathbf{R}$. On remarque aussi que si n est un entier infiniment grand, l'« ensemble » des entiers standard est contenu dans l'ensemble fini $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \dots, n\}$. On pourra donc dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers standard.

Standardisation : On veut considérer l'ensemble des éléments x d'un ensemble E vérifiant une propriété F. Si cette propriété n'est pas interne, ce n'est pas nécessairement un ensemble. Il existe néanmoins un sous-ensemble dont les éléments standard sont exactement les éléments standard de E qui vérifient F. On note cela ${}^S\{\, x \in E \;:\; F(x) \,\}$.

L'intérêt de l'analyse non-standard provient de la propiété très agréable suivante. Toute assertion interne (*i.e.*, ne faisant pas intervenir le prédicat « standard ») est vraie dans la théorie des ensembles si et seulement si elle est vraie pour l'analyse non-standard. En particulier, l'analyse non-standard est un *outil* pour démontrer (d'une manière différente, souvent plus simple) des résultats standard (que l'on pourrait, au prix de certains efforts, démontrer par des méthodes standard). C'est un peu comme les raisonnement heuristiques des physiciens, qui dans leurs calculs négligent des quantités qui ne sont peut-être pas toujours négligeables et arrivent très rapidement à des résultats intéressants ; mais avec l'analyse non-standard, cela a un sens et constitue même une démonstration.

Ainsi, en topologie, on peut remplacer la notion de voisinage par celle de *halo* : le halo d'un point d'un espace topologique est l'« ensemble » des points infiniment proches de ce point. On prendra garde : ce n'est *pas* un ensemble. On peut utiliser les halos pour définir les notions usuelles d'intérieur, d'adhérence, de continuité, de dérivabilité : pour des objets standard, ces notions coïncident avec les notions usuelles, mais pas pour les objets internes ; on parlera alors de S-continuité, etc., pour ces nouvelles notions. Par exemple, si ε désigne un infiniment petit, la fonction $\arctan(x/\varepsilon)$ est continue mais pas S-continue en 0 et la fonction $\varepsilon\lfloor x/\varepsilon \rfloor$ est S-continue mais discontinue.

À un nombre réel (qui n'est pas infiniment grand) on peut associer un unique réel standard dont il est infiniment proche : son *ombre*. On peut généraliser cette notion aux fonctions et on retombe sur les S-notions : une fonction est S-continue si et seulement si elle possède une ombre continue (en continuant un peu dans cette direction, on démontre aisément le théorème d'Ascoli).

Après une introduction rapide et compréhensible à l'analyse non-standard, le livre présente différentes applications : existence de canard pour certains systèmes dymamiques, notion de limite en probabilités, théorie de la mesure (on peut se ramener à la mesure sur les ensembles finis), topologie, calcul différentiel, etc.

L'ouvrage s'achève sur l'application de l'analyse non-standard à l'*enseignement* de l'analyse — je demeure sceptique : ce domaine me semble propre à d'innombrables confusions (il y en a d'ailleurs probablement dans les paragraphes qui précèdent) et ne plus voir l'analyse non-standard comme de la magie profondément noire me semble requérir une bonne compréhension de la théorie des modèles. **V.Z.**

Knot theory and its applications, K. Murasugi, Birkhäuser, 1996

Ce livre expose tant l'histoire que les développements récents de la théorie des nœuds, en restant toujours élémentaire.

Un *nœud* est un plongement de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}^3$ ou $\mathbf{S}^3$. Pour éviter les pathologies, comme une ficelle infiniment nouée, on se limite aux nœuds polygonaux. On identifiera deux nœuds « équivalents ». La somme connexe de deux nœuds est bien définie ; réciproquement, on peut tenter d'écrire un nœud comme somme connexe de nœuds *premiers*, *i.e.*qui ne sont pas somme connexe de nœuds non triviaux. Une telle décomposition existe et est unique — mais en général, on ne sait pas la calculer.

De nombreux mathématiciens ont cherché à établir des tables de nœuds ou de nœuds premiers, en leur associant des nombres (*codes*) ou des objets combinatoires (graphes), mais ces méthodes se ramènent toutes à un tâtonnement, que l'ordinateur facilite.

Le problème global de la théorie de nœuds est celui de la classification : être capable d'établir une table exhaustive des nœuds et savoir dire quand deux nœuds sont équivalents. Un objectif plus raisonnable est la recherche d'*invariants* des nœuds : on veut associer une quantité mathématique (un nombre, un groupe) à un nœud, de manière à obtenir un même résultat pour des nœuds équivalents ; en particulier, si on obtient des résultats différents pour deux nœuds, on pourra dire qu'ils ne sont pas équivalents.

On construit les invariants classiques à l'aide d'un *diagramme* du nœud, *i.e.*, une projection sur un plan. Deux diagrammes correspondant à un même nœud sont reliés par les *mouvements de Reidemeister*. Des considérations combinatoires sur ces diagrammes permettent de définir certains des invariants classiques (nombre de croisements, de ponts, etc.).

Une autre manière de construire des invariants consiste à associer une surface (la *surface de Seifert*) puis une matrice à un nœud. À l'aide du déterminant de cette matrice, on peut construire les polynômes d'Alexander et de Conway, que l'on peut calculer explicitement à l'aide des *relations de démêlement* : remplacer un croisement dans le diagramme par un croisement revient à effectuer une transformation simple sur le polynôme.

En se restreignant à certaines classes de nœuds, on sait les classifier et résoudre la plupart des problèmes les concernant : c'est par exemple le cas pour les nœuds tracés sur le tore ou les nœuds algébriques.

On est aussi amené à étudier des objets qui ressemblent à des nœuds : liens, enchevêtrements ou tresses. En particulier, on peut montrer que tout nœud peut s'obtenir en « refermant » une tresse.

Un autre invariant, le polynôme de Jones, ou sa généralisation, le polynôme de Homfly, est apparu il y a une quinzaine d'années : on peut le définir de manière très compliquée, ou, comme pour le polynôme d'Alexander, par une relation de démêlement.

Les *invariants de Vassiliev* sont une autre classe d'invariants, qui se calculent à l'aide d'une généralisation des relations de démêlement pour des nœuds *singuliers*.

La théorie des nœuds a des applications dans d'autres domaines de la topologie : en retirant un voisinage tubulaire d'un nœud (ou d'un lien) de $\mathbf{S}^3$ et en le recollant au même endroit après l'avoir « tordu », on peut obtenir toutes les variétés connexes, orientables, fermées de dimension trois. Les liens qui donnent la même variété sont reliés par les *mouvements de Kirby* : on peut ainsi vérifier que certains invariant des nœuds sont des invariants des variétés de dimension trois. Signalons un autre résultat intéressant : toute variété connexe orientable fermée de dimension trois peut s'obtenir comme un revêtement à trois feuillets de $\mathbf{S}^3$ ramifié le long d'un nœud.

Le livre s'achève sur des applications de la théorie de nœuds en mécanique statistique (pas très clair), en biologie ou en chimie. **V.Z.**