Petits problèmes

Nous vous proposons ici quelques problèmes que nous avons rencontrés, et pour lesquels, en général, nous n'avons pas de résultat satisfaisant. Vous pouvez nous soumettre vos résultats à l'adresse du journal : `hubris@rip.ens-cachan.fr`, afin que nous les publiions dans les numéros suivants. **N.M.**

Un problème de densité

On montre assez facilement que l'ensemble $\{\sin n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans l'intervalle $[-1,1]$. Cela résulte du fait que l'image par une fonction f continue (en l'occurence, le sinus) d'un espace dense (qui sera ici l'ensemble $\{p+2\pi q \mid (p,q) \in \mathbf{Z}^2\}$, qui est dense dans $\mathbf{R}$) est un ensemble dense dans l'image de f.

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si l'ensemble $\{n \cdot \sin n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$. La méthode précédente ne s'applique plus, puisque la fonction $x \mapsto x \cdot \sin x$ appliquée à $p + 2\pi q$ ne donne pas $p \sin p$. **N.M.**

« Le cheval et la rivière »

Ce problème est aussi une extension d'un problème connu : un cavalier, partant d'un point A, veut se rendre au point B. Mais « qui veut aller loin ménage sa monture », et il décide donc de passer par la rivière (rectiligne) afin d'y laisser son cheval se désaltérer. On suppose que notre cavalier peut passer à travers champs et se déplace donc où il veut. Son but étant de minimiser la distance parcourue, caractériser le point de la rivière où il va s'arrêter.

Ce problème a une solution simple : si on note B' le symétrique du point B par rapport à la rivière (rectiligne), si on connaît un chemin « minimal » de A à B', on obtient un chemin minimal de A à B en prenant le chemin de A à M puis le symétrique, par rapport à la rivière, du chemin de M à B'. Le plus court chemin entre deux points étant la ligne droite (on supposera que localement, la Terre est plate...), le lieu de la pause est l'intersection de la rivière et du segment reliant A à B'.

Le problème que l'on considère maintenant est le même, mais on suppose que la rivière est un cercle et que le cavalier se trouve à l'intérieur de ce cercle.

N.M.

Le problèmes des timbres

On considère un ensemble de $2k-1$ timbres, de valeurs différentes deux à deux. Montrer que l'on peut en prendre un sous-ensemble contenant exactement k timbres, et dont la somme des valeurs soit un multiple de k. **N.M.**

Le problème des timbres (bis)

On considère un ensemble de timbres, dont les valeurs se situent dans un ensemble de k entiers, et dont le nombre est illimité pour chaque valeur. On peut alors montrer qu'à partir d'une certain entier, toutes les valeurs sont réalisables. Le problème est de le montrer, mais surtout d'exprimer l'entier minimal à partir duquel toutes les valeurs sont réalisables.

Par exemple, si on a un ensemble infini de timbres de trois francs et un ensemble infini de timbres de cinq francs, alors on peut réaliser toutes les valeurs à partir de huit francs. Mais sept francs n'est pas réalisable. **N.M.**

Les bagues de Suleima

Le fiancé de Suleima, orfèbvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve de son amour, de lui offrir chaque mois une bague en or différente, incrustée d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a dix pierres précieuse, régulièrement réparties, et se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte. Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ? **G.D.R.**

Composantes connexes

On note E un espace vectoriel réel de dimension n supérieure ou égale à 2, et $Q^*(E)$ l'espace des formes quadratiques non dégénérées sur E. Décrire les composantes connexes de $Q^*(E)$. **G.D.R.**