Géométrie Hyperbolique Plane

Gabriel Dos Reis
dosreis@dptmaths.ens-cachan.fr

« Au lieu de parler de points, de droites et de plans, on devrait pouvoir à tout moment parler de tables, de chaises et chopes de bière. » – David Hilbert

Pour une tasse de cappuccino de plus...

Un condisciple de Taupe que j'ai retrouvé il n'y a pas longtemps autour d'une tasse de cappuccino m'a demandé ce que je faisais actuellement à l'ENS de Cachan. Flatté par l'intérêt que cet ami porte à mon cursus scolaire, je lui répondis : « de la Géométrie. » Il s'étonna d'apprendre qu'on puisse encore s'intéresser à cette vieille discipline qui n'a probablement plus rien à cacher. Devant cet étonnement je décidai de lui expliquer qu'il y avait beaucoup de choses à comprendre dans ce domaine. Vu mon enthousiasme pour la Géométrie qu'il jugea exagéré il risqua la question « Mais qu'est-ce que la Géométrie ? » Je saisis la perche : « La Géométrie est l'étude des propriétés d'un G-espace (Ω, G), où G est un groupe opérant sur un ensemble Ω. » Je ne peux décrire ici l'expression du visage de mon ami. Je fus d'abord surpris, car je savais qu'il comprenait parfaitement le sens de ma phrase. Il m'expliqua qu'il ne voyait pas de rapport avec la bonne vieille Géométrie qu'on nous a enseignée jusqu'en Taupe. Il objecta que ma définition est probablement motivée par une abstraction stérile, qui aura sûrement comme conséquence de détruire mon imagination si ce n'est déjà le cas. J'ai alors compris qu'il fallait commander d'autres tasses de cappuccino... Cinq heures plus tard mon ami me quitta, émerveillé, sur ces mots : « Ah... je n'ai pas perdu ma journée. J'ai appris qu'il existe beaucoup de géométries, entre autre ce que c'est que la géométrie hyperbolique plane. Je peux aller me coucher maintenant en toute tranquilité : je ne mourrai pas idiot. » J'ai décidé de partager cette journée dans les colonnes de Hubris.

Le cinquième postulat

Aux alentours de 300 avant J.-C. un certain Euclide entreprit de compiler la science mathématique grecque de son temps (augmentée de ses propres découvertes). Cette compilation étaient divisée en livres appelés « Éléments ». Ces « Éléments » constituent le premier système formel mathématique connu. Euclide faisait une distinctoin nette entre ce qu'il appélait « axiomes » ou postulats, suivis de définitions et les « théorèmes » qui étaient des assertions déduites des axiomes et définitions suivant une logique bien déterminée.

Le livre 13 des « Éléments » contient l'essentiel de la géométrie grecque. Après y avoir défini des notions géométriques comme le point, la droite et le plan Euclide exposa cinq postulats qui devaient fonder sa géométrie. Si les quatre premiers axiomes ont été acceptés sans difficulté, le cinquième a été la source des principales critiques du système d'Euclide. Il s'énonçait en ces termes (modernes) :

> Si une droite rencontre deux droites et détermine avec elles des angles intérieurs de somme strictement plus petite que 180°alors ces droites intersectent.

Cet axiome est équivalent à cet autre (fameux) postulat dit de parallélisme :

> Par un point pris en déhors d'une droite il passe une et une seule droite n'intersectant pas cette dernière.

Durant les 20 siècles qui suivèrent les Éléments, des générations de mathématiciens partagèrent la conviction que le cinquième postulat d'Euclide était déductible des quatres premiers ; et ceci d'autant plus qu'Euclide a développé une majeure partie de sa géométrie sans faire appel à ce fameux postulat (voir le paragraphe intitulé « La Géométrie Absolue »). Leurs efforts acharnés, notamment ceux de Saccheri, furent vains.

Il fallut attendre le XIX-ième siècle pour que Carl Friedrich Gauss, sans doute le plus grand mathématicien de son temps, convaincu de la justesse d'Euclide établît qu'une négation du postulat de parallélisme conduisait à une géométrie toute aussi cohérente que celle qu'on appelle désormais la Géométrie Euclidienne. Malheureusement Gauss ne publia jamais ses résultats craignant « la clameur des Béotiens. » Indépendamment, deux de ses contemporains Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1829) et János Bolyai (1832) retrouvèrent ses résultats. Il est à noter que ces trois mathématiciens ont abouti à la même géométrie car ayant adopté cette forme particulière de la négation du postulat de parallélisme :

> Par tout point pris en déhors d'une droite il passe au moins deux droites ne l'intersectant pas.

Cette géométrie s'appelle de nos jours *Géométrie Hyperbolique* et le terme de *Géométrie non-euclidienne* est donné à toute géométrie dans laquelle le postulat de parallélisme est mis en défaut.

En 1868 Eugenio BELTRAMI mit définitivement un terme aux critiques du système d'EUCLIDE en construisant un modèle euclidien de la Géométrie Hyperbolique : il en découle que si cette dernière contient une inconsistance il en est de même de la Géométrie Euclidienne. Ce qui laisse songeur les affirmations du philosophe KANT comme quoi la Géométrie Euclienne était la seule concevable par l'esprit humain. En 1871 Felix KLEIN interpréta le modèle de BELTRAMI en termes de Géométrie Projective. D'autres modèles furent construits tels le modèle conforme du disque unité, le modèle demi-plan supérieur de Poincaré, le modèle hyperboloide...

Une définition précise de ce qu'est une géométrie devint nécessaire. En 1872, au congrès des mathématiciens à Erlangen, F. KLEIN proposa (ce qui allait devenir le *programme d'Erlangen*) de définir la géométrie en termes d'actions de groupes. Ainsi un modèle de géométrie sera un G-espace Ω, une figure géométrique une partie de Ω et une propriété géométrique est un invariant de cette action. Deux modèles (Ω_1, G_1) et (Ω_2, G_2) de géométrie seront dits équivalents s'il existe une bijection $\Theta : \Omega_1 \to \Omega_2$ et un isomorphisme $\Phi : G_1 \to G_2$ vérifiant : $\Theta(g \cdot \omega) = \Phi(g) \cdot \Theta(\omega)$. Une géométrie est alors une classe d'équivalence de modèles de géométrie.

Dans le cadre de travail proposé par KLEIN, une géométrie est finalement un système d'axiomes et un modèle de cette géométrie est une théorie mathématique dans laquelle ces axiomes sont vérifiés. Cette approche est devenue traditionnelle et nous la suivrons : ainsi on énoncera les axiomes qui fondent la Géométrie Hyperbolique, quelques théorèmes puis on construira les modèles classiques de cette géométrie. La tentation de succomber aux charmes de la géométrie riemannienne a été grande. Nous croyons y avoir résisté, ceci afin de garder un niveau élémentaire à l'exposé.

Les axiomes de Playfair

La Géométrie Absolue

Une partie importante de la Géométrie Euclidienne, comme cela a été dit plus haut, peut être développée sans l'intervention du postulat du parallélisme. Cette sous-géométrie se retrouve naturellement en Géométrie Hyperbolique. Nous avons décidé de l'exposer, brièvement, dans cette section afin que l'on puisse distinguer clairement les résultats qui découlent du postulat du parallélisme (ou de sa négation) de ceux qui lui sont indépendants. On travaillera dans toute cette section avec un ensemble $\mathscr{A}$ appelé *plan absolu* ou *plan* tout court dont les éléments sont dénommés des *points*.

Axiome 1

> Il existe des sous-ensembles du plan appelés *droites* tels que deux points distincts appartiennent à une unique droite.

Si A et B sont deux points distincts du plan, on notera (AB) la droite qu'ils déterminent ; ainsi la droite (BA) est la même chose que la droite (AB). Il résulte de cet axiome que l'intersection, lorsqu'elle n'est pas vide, de deux droites distinctes est un singleton. L'axiome suivant permet de mesurer la « distance » entre deux points.

Axiome 2

> Tout couple (A, B) de points déterminent un unique nombre réel positif $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$ appelé *distance entre A et B*, nul si et seulement si $A = B$.

Axiome 3

> À toute droite (D) du plan correspond au moins une bijection $\Gamma : (D) \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}(A, B) = |\Gamma(A) - \Gamma(B)|$.

Une telle bijection Γ se nomme une application coordonnée sur la droite D. On dira qu'un réel b est compris entre deux réels a et b si l'une au moins des phrases

- $a < b < c$,
- $c < b < a$

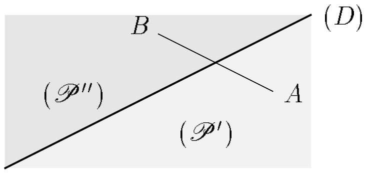
est vraie ; ce que l'on notera $\langle abc \rangle$ ou $\langle cba \rangle$. Si A, B et C sont trois points colinéaires, on dira que B est situé entre A et C (ce que l'on notera $\langle ABC \rangle$ ou $\langle CBA \rangle$ suivant le cas) si pour une application coordonnée, donc pour toute application coordonnée Γ, le réel $\Gamma(B)$ est compris entre $\Gamma(A)$ et $\Gamma(C)$.

Soient deux points A et B du plan. On appelle segment ouvert d'extrémités A et B le sous-ensemble, noté $]AB[$, constitué des points X qui vérifient $\langle AXB \rangle$. Le segment fermé $[AB]$ d'extrémités A

et B est l'ensemble $]AB[\cup\{A,B\}$. Les segments semi-ouverts définis par A et B sont : $[AB[=\{A\}\cup]AB[$ et $]AB] =]AB[\cup\{B\}$. La demi-droite ouverte $]AB)$ (resp. fermée $[AB)$) d'origine A et passant par B est définie comme étant l'ensemble des points X tels que $\langle AXB\rangle$ ou $X = B$ ou $\langle ABX\rangle$ (resp. $X = A$ ou $\langle AXB\rangle$ ou $X = B$ ou $\langle ABX\rangle$). Ces définitions étant posées, on montre qu'il existe un unique point de droite (AB) à égale distance des points A et B et situé entre ces deux points : on l'appelle le milieu du segment $[AB]$. Une partie du plan est dite convexe si chaque fois qu'elle contient deux points, elle contient le segment qu'ils définissent. Il est clair que le plan absolu, l'ensemble vide, les points, les droites, les demi-droites et les segments sont des parties convexes du plan.

Axiome 4

> Toute droite (D) du plan détermine exactement deux parties $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P}'')$ non-vides, convexes telles que :
>
> 1. (D), $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P}'')$ forment une partition du plan,
> 2. si A est un point de $(\mathscr{P}')$ et B un point de $(\mathscr{P}'')$ alors le segment $]AB[$ coupe la droite (D).



Les parties $(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{P}'')$ s'appellent les côtés opposés ou les demi-plans ouverts opposés de la droite (D). Les parties $(D)\cup\mathscr{P}'$ et $(D)\cup\mathscr{P}''$ se nomment les demi-plans fermés opposés de (D). On dira que deux points A et B sont séparés par la droite (D) s'ils se trouvent dans les côtés opposés de (D). Un angle est la réunion de deux demi-droites fermées non-colinéaires ayant une origine commune. L'origine commune s'appelle le sommet de l'angle et les demi-droites fermées ses cotés. L'angle formé par deux demi-droites fermées $[BA)$ et $[BC)$ est noté $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{CBA}$. L'intérieur de cet angle est l'ensemble des points se trouvant du même côte que A de la droite (BC) et du même côté que (C) de la droite (AB). Il est clair que cet ensemble est convexe. Deux angles sont dits opposés si les côtés de l'un sont les côtés opposés de l'autre. Si les demi-droites $[BA)$ et $[BA')$ (resp. $[BC)$ et $[BC')$) sont opposées et que les trois points A, B et C ne sont pas colinéaires alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'BC'}$ (resp. $\widehat{A'BC}$ et $\widehat{ABC'}$) sont opposés. Ces quatre angles s'appellent les angles d'intersection des deux droites (BA) et (BC). Deux angles sont dits adjacents s'ils admettent un côté commun et leurs intérieurs ne se rencontrent pas. On dira qu'une demi-droite (D_1) est située entre les demi-droites (D_2) et (D_3) si ces trois demi-droites ont la même origine, les demi-droites fermées de (D_2) et (D_3) forment un angle, et la demi-droite ouverte de (D_1) est intérieure à l'angle de (D_2) et (D_3). Il vient de cette définition qu'un point P est intérieur à l'angle $\widehat{ABC}$ si et seulement si la demi-droite $]BP)$ est située entre $]BA)$ et $]BC)$. Il est clair aussi que si les points A, B et C ne sont pas colinéaires alors le segment ouvert $]AC[$ est intérieur à l'angle $\widehat{ABC}$.

Axiome 5

> À tout angle $\widehat{ABC}$ correspond un unique réel compris entre 0 et 180 appelé sa mesure en degré.

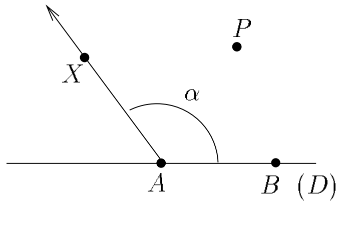
La mesure en degré d'un angle $\widehat{ABC}$ sera noté $\widehat{ABC}^\circ$. Un angle dont la mesure en degré vaut α sera appelé un angle de degré α. L'axiome 5 permet essentiellement de mesurer les angles. Afin d'effectuer des calculs avec ces mesures il faut au moins une règle supplémentaire :

Axiome 6

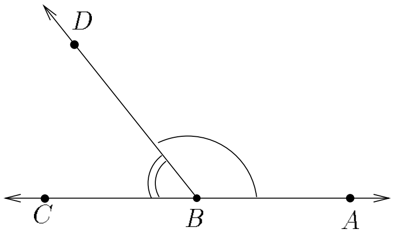
> Soit $]BD)$ une demi-droite intérieure à l'angle $\widehat{ABC}$ alors l'égalité suivante est vraie : $\widehat{ABD}^\circ + \widehat{DBC}^\circ = \widehat{ABC}^\circ$.

Axiome 7

> Si la demi-droite $[AB)$ est contenue dans le bord (D) du demi-plan ouvert $(\mathscr{P}((D),P))$ alors il existe au moins une bijection, appelée système de coordonnée angulaire, entre l'ensemble des demi-droites ouvertes $[AX)$ de $(\mathscr{P}((D),P))$ d'origine A et l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 180, telle que si α est l'image de $[AX)$ alors $\widehat{BAX}^\circ = \alpha$.



Un angle est dit aigu, droit, obtus si sa mesure en degré est respectivement plus petite que, égale à, plus grande que $90°$. Deux angles sont dits complémentaires (resp. supplémentaires) si leur somme vaut $90°$ (resp. $190°$). On montre que si les demi-droites opposées $]BA)$ et $]BC)$ ne sont pas colinéaires à la demi-droite $]BD)$ alors les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{DBC}$ sont supplementaires.



Il est clair que si les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{DBC}$ sont adjacents et supplémentaires alors les demi-droites $]BA)$ et $]BC)$ sont opposées. On montre également que deux angles opposés ont la même mesure.

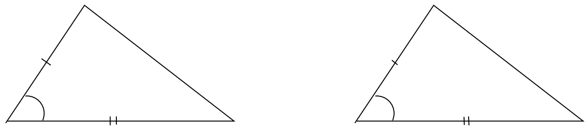
On dit que les demi-droites $[BD)$ et $]BD)$ bissectent l'angle $\widehat{ABC}$ si $]BD)$ lui est intérieure et $\widehat{DAB}°= \widehat{DAC}°$. Une droite est appelée une bissectrice d'un angle si elle est le support d'une demi-droite bissectrice. On montre que tout angle possède une unique bissectrice.

Deux droites sécantes sont dites perpendiculaires si l'un de leurs angles d'intersection est droit. Il s'en suit alors les autres angels de l'intersection sont droits. D'autre part, il est un fait qu'une droite admet une unique perpendiculaire en un point donné.

Étant donnés trois points A, B et C non alignés, on appelle triangle ABC la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Les points A, B, C (resp. les segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, resp. les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$) s'appellent les sommets (resp. les côtés, resp. les angles) du triangle ABC. Deux segments (resp. deux angles) sont dits congruents s'ils ont même longueur (resp. mesure d'angle). Il est clair que la relation de congruence est d'équivalence. Une correspondance entre deux triangles ABC et $A'B'C'$ est une bijection entre les sommets (resp. les angles, resp. les côtés) des traingles ABC et $A'B'C'$ telle que les sommets des angles correspondent aux sommets des angles images. Une congruence entre deux triangles est une correspondance entre ces triangles telle que les côtés (resp. angles) correspondants soient congruents.

Axiome 8

> Une correspondance entre deux triangles telle que deux côtés et l'angle délimité par ces côtés soient congruents à leurs correspondants est une congruence.



Cet axiome permet d´établir que deux triangles sont congruents à partir de propriétés de congruence angle–côté–angle, côté–côté–côté, hypthénuse–angle, hypothénuse–côté. Les congruences forment un groupe, pour la loi de composition des applications, appelé groupe d'isométries.

En Géométrie Absolue, où les droites sont d'étendue illimitée, le phénomène curieux suivant se produit : par un point pris en déhors d'une droite il passe *au moins* une droite ne la apprencontrant pas. Combien y a-t-il de telles droites ? La vérité est que les axiomes de la Géométrie Absolue ne sont pas assez puissants pour répondre à cette question. Si l'on répond, arbitrairement comme Euclide l'a fait, qu'il en existe *une unique* alors la géométrie devient euclidienne. Si en revanche on s'autorise plus d'une telle droite alors la géométrie devient hyperbolique.

Axiome hyperbolique

> Par un point P en déhors d'une droite (D) il passe au moins deux droites ne rencontrant pas (D).

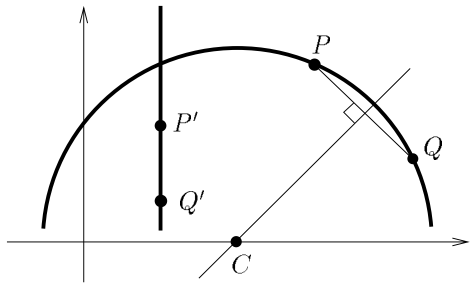
Dans le cadre de la géométrie hyperbolique, cet axiome est équivalent à l'assertion suivante :

> Par un point P en déhors d'une droite (D) il passe une infinité de droites ne rencontrant pas (D).

Avec des yeux hyperboliques...

... on voit des droites circulaires,

Notre premier modèle du plan hyperbolique sera l'ensemble $\mathcal{U}$ des points (identifés avec leurs affixes) d'ordonnée strictement positive. Nous décidons d'appeler *h-droite* du plan $\mathcal{U}$, son intersection avec toute droite euclidienne verticale ainsi que celle avec tout cercle euclidien centré sur l'axe des réels.

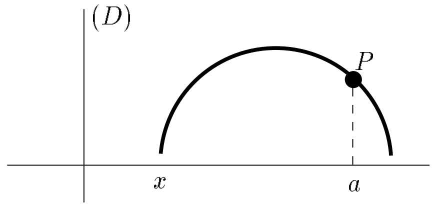


L'axiome 1 est-il vérifié ? Considérons deux points distincts P et Q du plan $\mathcal{U}$ et désignons pas (D) la droite euclidienne qu'ils définissent. Si (D) est verticale alors il est clair que son intersection avec le plan $\mathcal{U}$ est l'unique h-droite qui contient les points P et Q. Dans le cas contraire, une h-droite qui contiendrait ces deux points sera nécessairement un demi-cercle euclidien centré sur l'axe des réels. En existe-t-il ? Oui, car la droite (D) n'étant pas verticale la médiatrice (au sens euclidien) du segment $[PQ]$ rencontre l'axe des abscisses en un point C et apparemment l'intersection du cercle de centre C et de rayon $CP = CQ$ est une h-droite et c'est la seule qui contient les points P et Q.

L'existence d'une distance sur le plan $\mathcal{U}$ vérifiant les axiomes 2 et 3 est reportée à plus tard. Qu'en est-il de l'axiome 4 ? Rappelons qu'un h-segment est un arc de cercle euclidien dont le support définit une h-droite. Averti de ce fait, il n'est pas dur de remarquer qu'une h-droite découpe toujours le plan hyperbolique en deux parties h-convexes. D'autre part une h-droite reliant deux points situés des côtés opposés d'une h-droite rencontre toujours cette dernière.

La notion d'angle se définit comme nous l'avons signalée au paragraphe consacré à la Géométrie Absolue. La mesure de l'angle entre deux h-demi-droites est celle (euclidienne) de l'angle défini par leurs tangentes (euclidiennes). Il découle de cette définition que les axiomes 5, 6 et 7 sont satisfaits. L'axiome 8 fait intervenir la notion de distance que nous n'avons toujours pas encore définie. Nous reportons donc son examen à plus tard. Et l'axiome 9 qui a motivé toute cette histoire ?

Considérons une h-droite (D) et un point P de $\mathcal{U}$ qui n'est pas situé sur (D). Nous savons depuis [DR] que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit de manière transitive sur les h-droites. On peut donc supposer, sans restreindre la portée du raisonnement, que la h-droite (D) est réalité l'axe des ordonnées et que le point $P = a + ib$ est d'abscisse stirctement positive. Alors pour tout x réel tel que $0 < x < a$, l'intersection du plan $\mathcal{U}$ et du cercle de centre $(a^2 - x^2 + b^2)/2(a - x)$ et de rayon $((a-x)^2+b^2)/2(a-x)$ est une h-droite passant par le point P et ne rencontrant pas la droite (D) : *notre modèle satisfait à l'axiome hyperbolique.* Avant d'affirmer que nous détenons un modèle euclidien du plan hyperbolique, il nous faut démontrer l'existence d'une distance compatible sur $\mathcal{U}$. C'est l'objet de la prochaine section.



lorsqu'il n'y a pas de dilatation...

Nous nous sommes servi, dans le paragraphe précédent, de l'action transitive du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur le plan $\mathcal{U}$ pour vérifier l'axiome hyperbolique. Il serait commode si en réalité ce groupe était un groupe d'isométries de notre géométrie. Ainsi nous ramenons la recherche générale d'une métrique dans le plan $\mathcal{U}$ à celle, plus restreinte, de métrique invariante par le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Plus précisément nous cherchons une fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ telle que :

1. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) \geqslant 0$ pour tout $(P,Q) \in \mathcal{U}^2$ et $\mathrm{d}(P,Q) = 0$ ssi $P = Q$,
2. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(Q,P)$ pour tout $(P,Q) \in \mathcal{U}^2$,
3. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) \leqslant \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,R) + \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(R,Q)$ pour tout $(P,Q,R) \in \mathcal{U}^3$,
4. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,R)+\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(R,Q)$ chaque fois que $\langle PRQ \rangle$,
5. $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(T(P),T(Q)) = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q)$ pour tout $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $(P,Q) \in \mathcal{U}^2$,
6. si possible, on voudrait que la distance $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ soit continue.

Il est clair que si la fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ cherchée existe alors toute fonction qui lui est proportionnelle par un facteur strictement positif convient également. D'autre part grâce à l'action transitive de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur les droites du plan $\mathcal{U}$, la propriété d'invariance nous dit que la fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur la h-droite $(D) = \{y\mathrm{i}, y > 0\}$. On remarque que les homothéties h_λ de rapport λ strictement positifs conservent (D). L'invariance veut alors que pour deux points $P = \mathrm{i}p$ et $Q = \mathrm{i}q$ de la droite (D) la valeur $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q)$ ne dépende que du rapport p/q ou encore du nombre réel $\ln(p/q)$. Puisque la fonction $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ est symétrique, le nombre

$\mathrm{d}(P,Q)$ ne dépend que de $|\ln(p/q)|$. En d'autres termes $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \phi(|\ln(p/q)|)$ pour une fonction ϕ donnée. En considérant l'additivité, on s'aperçoit que $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ pour tous nombres réels $x > 0$ et $y > 0$. Enfin, comme nous souhaitions disposer d'une distance continue, il nous reste $\phi(x) = k \cdot x$ pour un nombre réel $k > 0$ donné. Nous prendrons $k = 1$. Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines... En effet presque toutes les conditions énoncés ci-haut sont évidentes à vérifier sauf l'inégalité triangulaire. Encore un petit effort et on y est.

On peut effectuer un calcul brutal et procéder à des majorations, minorations pour obtenir le résultat cherché. Nous procédons autrement. Nous allons chercher un élément de longueur $\mathrm{d}s$ qui permettrait de reconstituer la distance $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$. Plus précisément nous sommes à la recherche d'une 1-forme $\mathrm{d}s$ dans le plan telle que pout toute courbe $\mathcal{C}$ différentiable par morceaux, on ait :

$$\begin{aligned} l(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s \\ \text{et} \quad l([PQ]) &= \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) \quad \text{pour tout } P, Q \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Considérons la différentielle $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$, alors pour toute transformation

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

on a :

$$T_*(\mathrm{d}z) = \frac{(ad-bc)\mathrm{d}z}{(cz+d)^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(cz+d)^2}.$$

D'autre part nous savons depuis [DR] que l'identité suivante a lieu :

$$\operatorname{Im} T(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

Il s'en suit que la différentielle $|\mathrm{d}z| / \operatorname{Im} z$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$-invariante. Ce sera notre élément de longueur $\mathrm{d}s$ cherché. En effet on remarque que pour deux points distincts $P = \mathrm{i}p$ et $Q = \mathrm{i}q$ de la h-droite (D), avec $p < q$:

$$l([PQ]) = \int_p^q \frac{\mathrm{d}y}{y} = \left| \ln\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q).$$

Par invariance et transitivité cette égalité est vraie pour n'importe quel couple de points de $\mathcal{U}$. L'inégalité triangulaire n'est toujours pas démontrée... Mais en réalité elle découle de l'observation suivante :

$$\mathrm{d}_{\mathcal{U}}(P,Q) = \inf_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des courbes différentiables par morceaux qui relient le point P au point Q car si $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ est un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$ reliant P à Q, alors :

$$l(\mathcal{C}) = \int \frac{\sqrt{x'(t) + y'(t)}}{y(t)} \mathrm{d}t \geqslant \int \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Cette nouvelle expression de notre distance $\mathrm{d}_{\mathcal{U}}$ montre que les axiomes 2 et 3 sont satisfaits en utilisant la transitivité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et en ramenant tout à la droite (D). Il nous reste à vérifier l'axiome 8. Nous profitons de l'occasion pour illustrer un fait caractéristique de la géométrie hyperbolique : la somme des angles d'un triangle hyperbolique ne fait pas π ! Pour cela il nous faut un deuxième modèle.

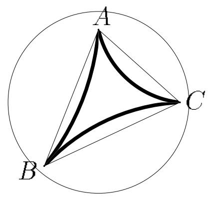
... on devient borné pour un défaut d'angle

Il est connu que la transformation

$$\Theta(z) = \mathrm{i}\frac{1-z}{1+z} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

envoie conformément le disque unité $\mathcal{D}$ sur le demi-plan supérieur de Poincaré. Il est donc possible de récupérer un autre modèle du plan hyperbolique par transport. Ainsi les h-droites dans le plan $\mathcal{D}$ sont les diamètres et arcs de cercles orthogonaux à $\partial\mathcal{D}$. Les mesures d'angles ne changent pas. Un avantage de ce modèle est qu'il est borné : on a la « sensation » de voir *tout ce qui s'y passe*. Qu'à cela ne tienne ! Car voici un phénomène tout à fait impossible dans le plan euclidien :

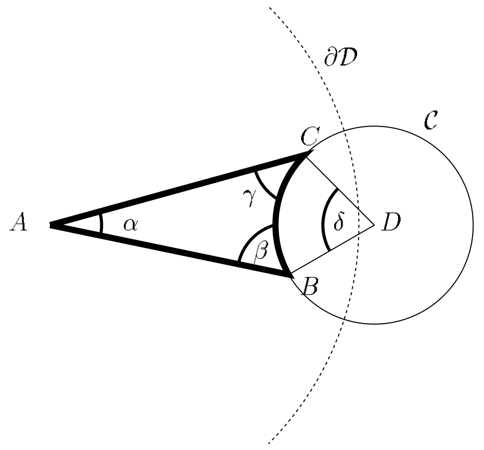
> Dans le plan hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est strictement plus petite que 180°.



En effet dans le plan $\mathcal{D}$ les h-côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ d'un h-triangle ABC sont contenus dans des demi-cercles orthogonaux au bord $\partial\mathcal{D}$ et il suffit de comparer les angles délimités aux angles du triangle euclidien de sommets A, B et C.

Il est légitime de se demander si la réciproque de ce fait est vrai, *i.e.* existe-t-il un triangle d'angles trois nombres réels α, β et γ positifs donnés à l'avance, et de somme strictemment plus petite que π ? La réponse est extraodinairement positive : tous les triangles solutions de ce problème sont *isométriques* entre eux. Voyons pourquoi.

Notons $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ le défaut d'angle. Soient un cercle $\mathcal{C}$ (euclidien) de centre D, deux points B et C du cercle $\mathcal{C}$ tels que les rayons $[DB]$ et $[DC]$ fassent un angle de mesure δ. Considérons les droites euclidiennes $\mathcal{L}_B$ et $\mathcal{L}_C$ passant par les points B et C et faisant des angles de mesures respectives β et γ avec l'arc de cercle de $\mathcal{C}$ de plus courte longueur délimité par B et C. Il découle de l'inégalité $\delta + \beta + \gamma = \pi - \alpha < \pi$ et d'un fameux théorème de la géométrie euclidienne plane – que le lecteur devine – que les droites $\mathcal{L}_B$ et $\mathcal{L}_C$ se coupent en un point A.



On obtient ainsi un quadriltère $ABDC$ d'angles intérieurs α, $\pi/2 + \beta$, δ et $\pi/2 + \gamma$. Quitte à considérer l'action d'une similitude directe – unique – on peut supposer que le cercle de centre A et orthogonal au cercle $\mathcal{C}$ est le bord du dique unité $\mathcal{D}$. Il n'y a pas de peine à observer que les points A, B et C sont *dans* le plan hyperbolique $\mathcal{D}$ et que le triangle hyperbolique ABC a des angles intérieurs de mesures α, β et γ. Il est clair – à travers le travail qui vient d'être fait – que le triangle ABC est unique à isométrie hyperbolique près.

Le lecteur attentif remarquera que l'axiome 8 découle de ce fait que nous venons de montrer.

L'opération des exprits du mal

Après cette courte introduction à la géométrie hyperbolique, nous invitons le lecteur à méditer Matthew Ryan :

> L'étude de la géométrie non-euclidienne n'apporte pas grand chose aux étudiants sinon fatigue, vanité, arrogance et imbécilité. L'espace « non-euclidien » n'est qu'une pseudo-invention de démons qui alimentent les phantasmes et les fausses connaissances des « non-euclidiens ». Comme les anciens sophistes, ces « non-euclidiens » ne semblent pas se rendre compte que leurs facultés mentales ont été obscurcies pas l'opération des esprits du mal.

M. Ryan ne dit pas si cette opération est effective et transitive... mais au moins le lecteur qui voudrait en savoir plus sur le sujet sait à quoi s'en tenir !

Pour en savoir plus...

[DR] Gabriel Dos Reis, *Première rencontre avec* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, Hubris (1997), no. 0, 12–20.

[L] Roger C. Lyndon, *Groups and geometry*, London Mathematical Society Lecture Series, no. 101, Cambridge University Press, 1985.