ἡ ὕβρις

Continuum mathématique des ENS

Achras — *O mais c'est qué, voyez-vous bien, je n'ai point sujet d'être mécontent de mes polyèdres : ils font des petits toutes les six semaines, c'est pire que des lapins. Et il est bien vrai de dire que les polyèdres réguliers sont les plus fidèles et les plus attachés à leurs maîtres ; sauf que l'icosaèdre s'est révolté ce matin et que j'ai été forcé, voyez-vous bien, de lui flanquer une giffle sur chacune de ses faces. Et que comme ça c'était compris. Et mon traité, voyez-vous bien, sur les mœurs des polyèdres qui s'avance : n'y a plus que vingt-cinq volumes à faire.*

A. Jarry, Ubu cocu, *Acte I, Scène I*

Éditorial

Les « matheux » ont leur journal c'est en soi une nouvelle. Ils ont l'ambition de nous intéresser à leur science, quel pari! Peut être pas si fou? Moi qui ne suis pas un fanatique, j'ai trouvé dans ce document, un outil pour la représentation des fractales, le concept d'intégrale oscillante et j'ai appris que l'utilisation des fractions en théorie des nombres était connue de l'Égypte pharaonique. Pour ce numéro en tout cas, l'objectif est atteint. Bravo aux initiateurs de cette publication et longue vie à elle.

Jacky Mazars
Directeur adjoint de l'ENS de Cachan

Sommaire

L-systèmes et polyèdres (Alain Daurat, daurat@llaic.univ-bpclermont.fr) 2
Théorie topologique des champs (Vincent Zoonekynd, zoonek@math.jussieu.fr) 14
La numération de Zokpé Zoki (Ayaovi Zokpé Zoki d'Almeida) 18
Livres 29

Le comité de rédaction attend vos articles

Bill d'Allombert (ballombe@ens.ens-lyon.fr)
Jean-David Dahan (dahan@dptmaths.ens-cachan.fr)
Gabriel Dos Reis (dosreis@dptmaths.ens-cachan.fr)
Nicolas Markey (markey@dptmaths.ens-cachan.fr)
Fabrice Noilhan (noilhan@ens.fr)
Vincent Zoonekynd (zoonek@math.jussieu.fr)

L-systèmes et polyèdres

Alain Daurat
daurat@llaic.univ-bpclermont.fr

Introduction

Motivations

Si on veut représenter des polyèdres sur un ordinateur, il faut calculer les coordonnées de ce polyèdre. Or ce calcul n'est pas aussi simple qu'il peut paraître. Ce petit article donne une solution. Ce n'est certainement pas la plus élégante ni la plus rapide mais elle fonctionne. (Tous les dessins représentés dans cet article ont été obtenus par cette méthode).

Bon, analysons un peu le problème : on se donne un polyèdre un peu régulier (qu'est ce que ça veut dire ?), on sait qu'une face de tel type est entourée de certaines autres faces d'un autre type. Par exemple pour un ballon de foot on sait qu'un hexagone est entouré par six pentagones. En général ces données permettent de calculer les angles entre les faces (angles de plans) et les angles entre les arêtes (angles de droites) grâce à des petits raisonnements trigonométriques.

Bon, avec ces données il faut essayer de construire le polyèdre. Or il se trouve qu'avec ces données les L-systèmes paraissent bien adaptés.

Les L-systèmes D'abord, un L-systèmes est une suite de mots (M_i) donnée par un axiome M_0 et des règles de substitutions pour passer de M_i à M_{i+1}.

Par exemple si on se donne les règles suivantes :

```
Axiome: A
A --> AA
```

alors on a $M_i = A^{2^i}$.

Dans le cas des L-systèmes chaque mot représente une figure géométrique.

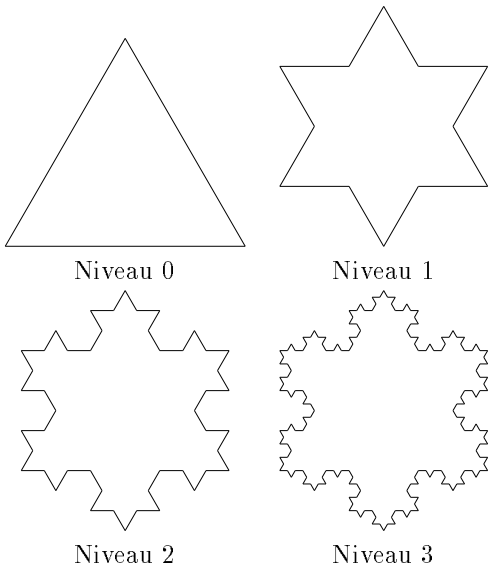
Pour faire ceci il faut imaginer un mobile (la tortue du logo !) qui est commandé par les lettres du mot. Attention beaucoup des lettres n'ont aucune signification pour le mobile et ne sont là que pour la substitution.

Voici dans le plan les symboles standard dans le cas d'un mouvement plan les longueurs et les angles sont fixés à l'avance.

- `F` : avance en traçant ;
- `f` : avance sans tracer ;
- `+` : tourne à droite ;
- `-` : tourne à gauche ;
- `|` : fait demi-tour (tourne de 180 degrés) ;
- `[` : mémorise la position (et l'orientation) du mobile (et le met dans la pile des positions) ;
- `]` : remet le mobile dans la dernière position enregistrée dans la pile des positions (et l'enlève de la pile).

Un exemple de fractal obtenu avec les L-systèmes est le flocon de Von Koch dont la grammaire est la suivante :

```
Axiome: -F++F++F
F --> F-F++F-F
Angle: 60.0 degrés
```



On peut aussi faire la même chose dans l'espace mais il faut rajouter les symboles suivants.

- `0` : tourne vers le haut ;
- `_` : tourne vers le bas ;
- `*` : tourne sur soi-même dans le sens direct (visse) ;
- `/` : dévisse.

En fait si le mobile est assimilé à un repère affine $(M, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (où $\vec{\imath}$ est la direction vers laquelle on avance, $\vec{\jmath}$ la direction des ailes si le mobile était un avion et $\vec{k}$ la troisième direction) alors les symboles `-` et `+` font une rotation dans le plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tandis que les symboles `0` et `_` la font dans le plan $(\vec{\imath}, \vec{k})$, et les symboles `*` et `/` dans le plan $(\vec{\jmath}, \vec{k})$.

C'est souvent dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ que l'on travaille de sorte que les symboles `+` , `-` , `0` et `_` tournent de l'angle appelé `Angle` qui est plutôt un angle de droite

et les symboles `*` et `/` font tourner de l'angle appelé `Rotation` qui est plutôt un angle de plan.

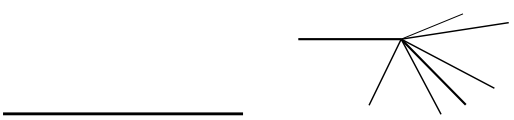
De plus les symboles `0` à `9` permettent de changer la valeur de `Angle` ou de `Rotation`.

Avec ceci, on peut aussi faire des fractals mais cette fois-ci à trois dimensions.

Par exemple la grammaire

```
Axiome: F
F --> F[+F][*+F][**+F][++F][*++F][*+++F]
Angle: 40 degrés
Rotation: 60 degrés
```

donne les objets suivants :



Niveau 0

Niveau 1

Niveau 2

Application aux polyèdres

On ne va pas chercher ici à définir ce qu'est un polyèdre mais ce qu'il faut avoir en tête : c'est un objet défini par ses sommets, ses arêtes et ses faces qui sont bien sur liés entre eux.

L'intérêt des L-systèmes vient du fait que la grammaire que l'on va attacher à certains polyèdres est fortement liée à ces trois entités.

Prenons l'exemple du ballon de foot (appelé plus pompeusement icosaèdre adouci). C'est un polyèdre à 32 faces : 20 hexagones et 12 pentagones (sur un ballon de foot les hexagones et les pentagones sont de couleur différente il me semble !).

Géométriquement on peut obtenir ce polyèdre en adoucissant l'icosaèdre c'est à dire en coupant les sommets au tiers de chaque arête : chaque face de l'icosaèdre est devenue un hexagone et chaque sommet est devenu un pentagone. Cette première propriété montre que le groupe des isométrie du ballon est le même que celui de l'icosaèdre.

Appelons *face arêtée* (attention à l'orthographe !) un couple (F, A) ou F est une face et A est un arête *orientée* appartenant à cette face.

A une isométrie près il y en a trois sortes : les pentagones pointés (genre XY), les hexagones avec une arête commune à un pentagone (genre TU), et les hexagones avec une arête commune à un autre hexagone (genre VW).

Si l'on raisonne à un déplacement près il y en existe alors six sortes. En effet une face arêtée est aussi munie d'une orientation, celle de cette face. Le vecteur normal à cette face est soit orienté vers l'extérieur du polyèdre (genre X, T, V) soit vers l'intérieur du polyèdre (genre Y, U, W).

L'ensemble des faces arêtées du ballon quotienté par les isométries directes laissant invariant le ballon est donc un ensemble à six éléments soit $\{T, U, V, W, X, Y\}$ ce sont les symboles que l'on va utiliser pour la grammaire.

La configuration des faces du ballon permet alors de trouver une grammaire qui permet de le représenter (voir figure page suivante) :

```
Axiome T
X --> 0[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F
Y --> 0[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F
T --> 1[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F
U --> 1[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F
V --> 1[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F
W --> 1[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F
Angle  72 60
Rotation 142.62 138.18
```

Pour trouver ces angles il suffit d'utiliser le fait que si l'on a trois demi-droites de même origine et si de plus l'on connaît les angles entre ces demi-droites alors on peut calculer les angles entre les plans qu'elles forment (trigonométrie classique).

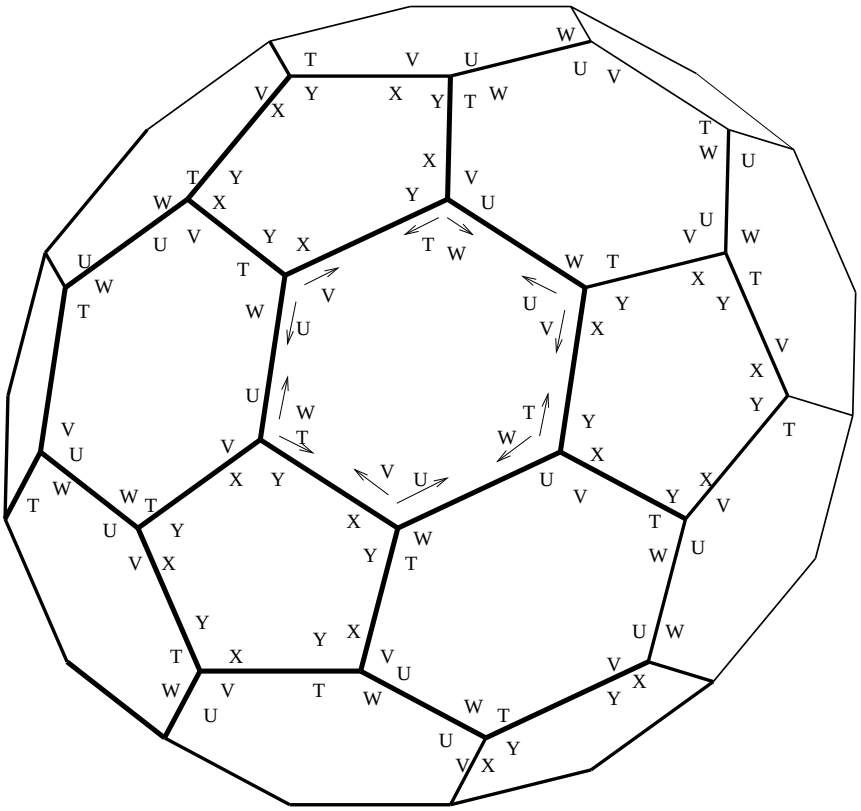
On va passer maintenant à une description plus ou moins exhaustive des polyèdres que l'on peut tracer grâce à cette méthode :

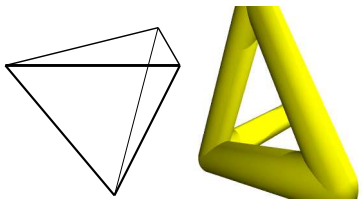
Les polyèdres réguliers (ou platoniciens) Il est bien connu qu'ils sont au nombre de cinq. Les grammaires de ces polyèdres sont les plus simples. En effet dans ce cas il n'y a qu'une sorte de face arêtée aux isométries près et deux sortes à un déplacement près ; il y aura donc toujours deux symboles : X représente les faces dont le vecteur normal se dirige vers l'extérieur et Y les autres.

Les grammaires diffèrent juste par le nombre de côtés des faces.

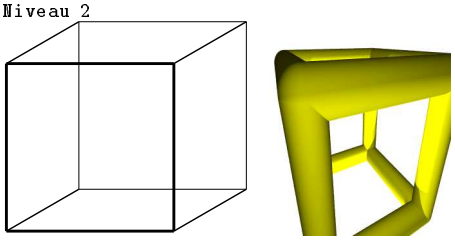
tetraèdre

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 120
Rotation  70.52
Niveau 2
```

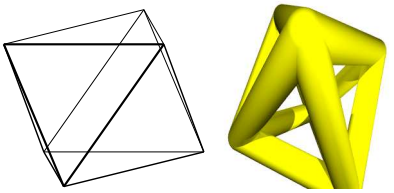




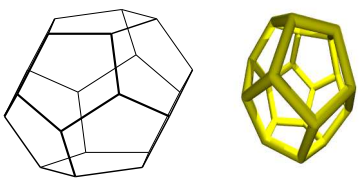
cube
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 90
Rotation 90
Niveau 2
```



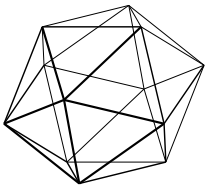
octaèdre
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 120
Rotation  109.47
Niveau 3
```



dodécaèdre
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 72
Rotation  116.56
Niveau 5
```



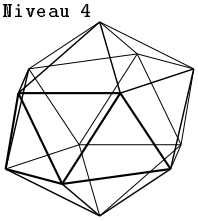
icosaèdre
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 120
Rotation  138.18
Niveau 5
```



Polyèdres réguliers non convexes (étoilés) Il existe trois dodécaèdres et un icosaèdre non convexes réguliers, leurs grammaires sont exactement les mêmes que celles de leurs cousins convexes, seuls les angles changent :

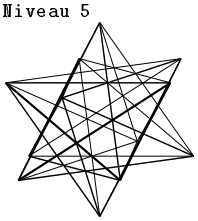
dodécaèdre étoilé de troisième espèce à faces convexes

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F=
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F=
Pas 6
Angle 72
Rotation 63.434948822922010648427806 28
Niveau 4
```



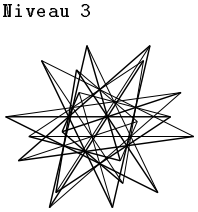
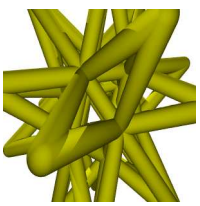
dodécaèdre étoile de troisième espèce à faces étoilées

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Pas 3
Angle 144
Rotation  116.56505117707798935157219 37
Niveau 5
```



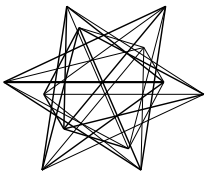
dodécaèdre étoilé de septième espèce

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Pas 3
Angle 144
Rotation  63.434948822922010648427806 28
Niveau 3
```

icosaèdre étoile

```
Axiome: X
X --> [*Y]F#+[*Y]F#+[*Y]F#=
Y --> [/X]F#+[/X]F#+[/X]F#=
Pas 100
Angle 120
Rotation 41.810314895778598065857916 80
Niveau 6
```



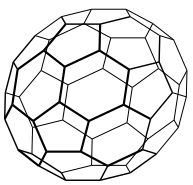
Les polyèdres semi-réguliers (ou archimédiens) Un polyèdre archimédien est un polyèdre dont tous les sommets sont semblables, *i.e.*, pour tous sommets M et M' il existe une isométrie (non forcément directe) laissant invariant le polyèdre et transformant M en M' et dont toutes faces sont des polygones réguliers. On les suppose en général convexes.

Attention, aucune des deux conditions n'entraine l'autre : un prisme à base carrée a tous ses sommets semblables et des faces différentes, une pyramide à base carrée et faces équilatérales a toutes ses faces régulières et des sommets différents.

Il est connu qu'hormis les prismes (à faces triangulaires ou carrées et à base régulière) il n'existe que treize polyèdres archimédiens convexes. (Je n'ai jamais vu de démonstration de ce résultat.)

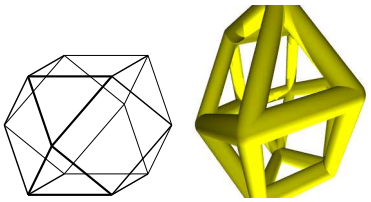
ballon (icosaèdre adouci)

```
Axiome T
X --> O[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F
Y --> O[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F
T --> 1[O*Y]F+[*W]F+[O*Y]F+[*W]F+[O*Y]F+[*W]F
U --> 1[*W]F+[O*Y]F+[*W]F+[O*Y]F+[*W]F+[O*Y]F
V --> 1[O/X]F+[/U]F+[O/X]F+[/U]F+[O/X]F+[/U]F
W --> 1[/U]F+[O/X]F+[/U]F+[O/X]F+[/U]F+[O/X]F
Angle  72 60
Rotation 142.62 138.18
Niveau 5
```



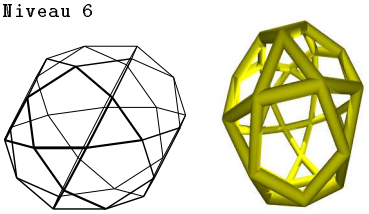
cubooctaèdre

```
Axiome H
G --> O[*H]F+[*H]F+[*H]F
H --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 120 90
Rotation 125.26 125.26
Niveau 4
```



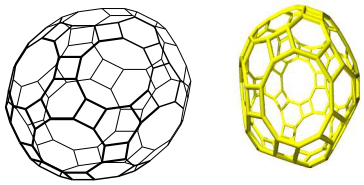
Dodécaèdre adouci (icosaèdre tronqué, triacontadoèdre)

```
Axiome H
G --> O[*H]F+[*H]F+[*H]F
H --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 120 72
Rotation  142.62 142.62
Niveau 6
```



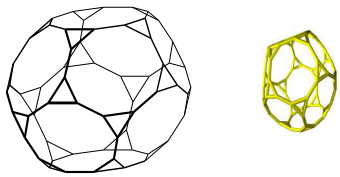
Triacontadoèdre adouci

```
Axiome G
G --> O[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F
H --> O[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F
I --> 1[O*g]F+[*l]F+[O*g]F+[*l]F+[O*g]F+[*l]F
J --> 1[*l]F+[O*g]F+[*l]F+[O*g]F+[*l]F+[O*g]F
K --> 2[*h]F+[1*j]F+[*h]F+[1*j]F
L --> 2[1*j]F+[*h]F+[1*j]F+[*h]F
g --> O[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F
h --> O[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F
i --> 1[O/G]F+[/L]F+[O/G]F+[/L]F+[O/G]F+[/L]F
j --> 1[/L]F+[O/G]F+[/L]F+[O/G]F+[/L]F+[O/G]F
k --> 2[/H]F+[1/J]F+[/H]F+[1/J]F
l --> 2[1/J]F+[/H]F+[1/J]F+[/H]F
Angle 36 60 90
Rotation 142.62
                 159.09 148.28
Niveau 6
```



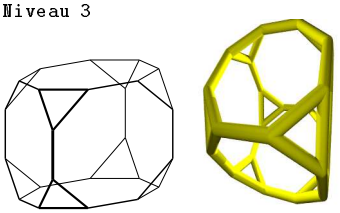
Dodécaèdre tronqué

```
Axiome G
G --> O[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> O[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> O[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> O[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 36 120
Rotation 116.56 142.62
Niveau 4
```



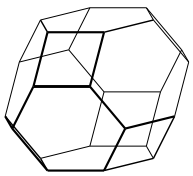
cube adouci

```
Axiome G
G --> O[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> O[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> O[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> O[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 45 120
Rotation  90 125.26
Niveau 3
```



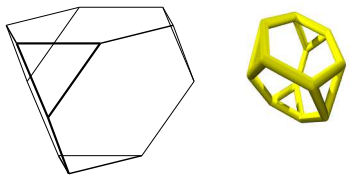
octaèdre adouci (Polyèdre de Lord Kelvin)

```
Axiome G
G --> O[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> O[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> O[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> O[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 60 90
Rotation 109.47 125.26
Niveau 3
```



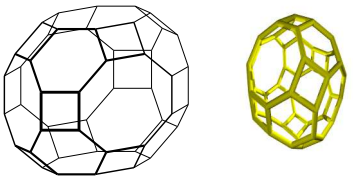
tetraèdre adouci

```
Axiome G
G --> 0[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> 0[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> 0[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> 0[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 60 120
Rotation 70.52 109.47
Niveau 2
```



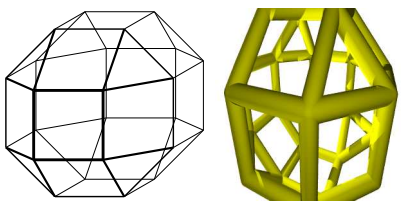
cubooctaèdre adouci

```
Axiome G
G --> 0[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F
H --> 0[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F
I --> 1[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F
J --> 1[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F
K --> 2[*h]F+[1*j]F+[*h]F+[1*j]F
L --> 2[1*j]F+[*h]F+[1*j]F+[*h]F
g --> 0[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F
h --> 0[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F
i --> 1[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F
j --> 1[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F
k --> 2[/H]F+[1/J]F+[/H]F+[1/J]F
l --> 2[1/J]F+[/H]F+[1/J]F+[/H]F
Angle 45 60 90
Rotation 125.26 144.73 135
Niveau 4
```



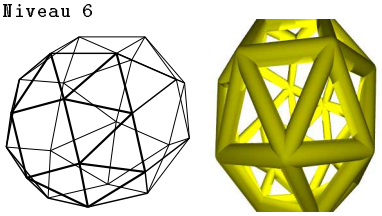
cubooctaèdre tronqué
(faussement tronqué??)

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 0[*g]F+[1*j]F+[*g]F+[1*j]F
I --> 0[1*j]F+[*g]F+[1*j]F+[*g]F
J --> 1[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 0[/G]F+[1/J]F+[/G]F+[1/J]F
i --> 0[1/J]F+[/G]F+[1/J]F+[/G]F
j --> 1[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 90 120
Rotation 135 144.73
Niveau 4
```



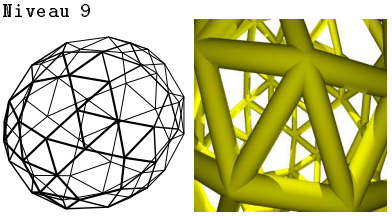
Cube transformé (Snub Cube)

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 2[0*g]F+[*j]F+[1*k]F
I --> 2[1*k]F+[0*g]F+[*j]F+
J --> 2[*j]F+[1*k]F+[0*g]F+
K --> 1[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 2[0/G]F+[1/K]F+[/J]F
i --> 2[1/K]F+[/J]F+[0/G]F
j --> 2[/J]F+[0/G]F+[1/K]F
k --> 1[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 90 120 120
Rotation  142.98  153.23 153.23
Niveau 6
```



Dodécaèdre transformé

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 2[0*g]F+[*j]F+[1*k]F
I --> 2[1*k]F+[0*g]F+[*j]F+
J --> 2[*j]F+[1*k]F+[0*g]F+
K --> 1[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 2[0/G]F+[1/K]F+[/J]F
i --> 2[1/K]F+[/J]F+[0/G]F
j --> 2[/J]F+[0/G]F+[1/K]F
k --> 1[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 72 120 120
Rotation  152.92 164.17 164.17
Niveau 9
```

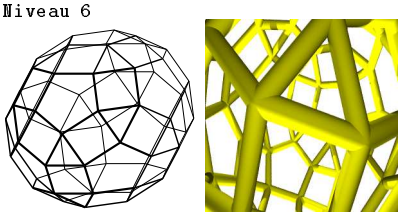


Ces deux derniers polyèdres ont la particularité d'être *chiraux*, c'est à dire qu'ils ne sont pas images d'eux-mêmes dans un miroir.

C'est assez visible dans leur grammaire : en effet ce sont les deux seuls où les règles correspondantes aux faces arêtées rentrantes sont les mêmes que pour les faces sortantes (par exemple la règle correspondant à H est g,j,k alors que la règle pour h est G,K,J). Du coup si on change l'orientation de l'espace on obtient un autre objet.

Triacontadoèdre tronqué

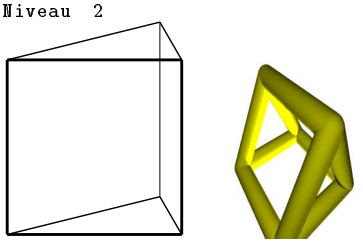
```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[*g]F+[2*j]F+[*g]F+[2*j]F
I --> 1[2*j]F+[*g]F+[2*j]F+[*g]F
J --> 2[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[/G]F+[2/J]F+[/G]F+[2/J]F
i --> 1[2/J]F+[/G]F+[2/J]F+[/G]F
j --> 2[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 72 90 120
Rotation 148.28 148.28 159.09
Niveau 6
```



Voici les prismes dont j'ai parlé précédemment, je n'ai représenté que les deux premiers de chaque série, ils peuvent tous s'obtenir par cette méthode

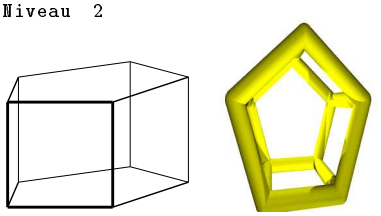
Prisme à faces carrées

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*i]F+[0*g]F+[*i]F
I --> 1[*i]F+[0*g]F+[*i]F+[0*g]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/I]F+[0/G]F+[/I]F
i --> 1[/I]F+[0/G]F+[/I]F+[0/G]F
Angle 120 90
Rotation 90 60
Niveau  2
```



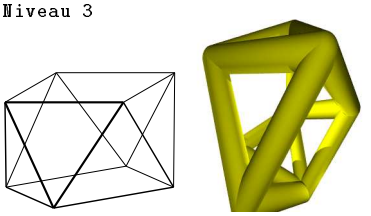
Prisme à faces carrées

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*i]F+[0*g]F+[*i]F
I --> 1[*i]F+[0*g]F+[*i]F+[0*g]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/I]F+[0/G]F+[/I]F
i --> 1[/I]F+[0/G]F+[/I]F+[0/G]F
Angle 72 90
Rotation 90 108
Niveau  2
```



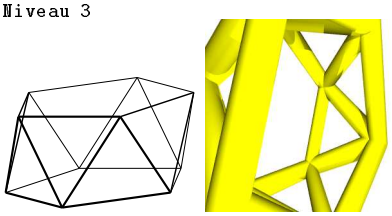
Prisme à faces triangulaires

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*j]F+[*i]F
I --> 1[*j]F+[*i]F+[0*g]F
J --> 1[*i]F+[0*g]F+[*j]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/J]F+[/I]F
i --> 1[/J]F+[/I]F+[0/G]F
j --> 1[/I]F+[0/G]F+[/J]F
Angle  90 120
Rotation 103.83  127.55
Niveau 3
```



Prisme à faces triangulaires

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*j]F+[*i]F
I --> 1[*j]F+[*i]F+[0*g]F
J --> 1[*i]F+[0*g]F+[*j]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/J]F+[/I]F
i --> 1[/J]F+[/I]F+[0/G]F
j --> 1[/I]F+[0/G]F+[/J]F
Angle  72 120
Rotation  100.81  138.18
Niveau 3
```



Les polyèdres semi-réguliers conjugués

A tout polyèdre on peut associer un autre polyèdre de telle façon qu'à un sommet d'un polyèdre correspond une face de l'autre et vice-versa : c'est ce qu'on appelle deux polyèdres conjugués. Par exemple le cube et l'octaèdre sont conjugués.

Plus concrètement à tout point $M(a, b, c)$ distinct de l'origine on peut associer le plan $\Phi(M)$ d'équation $ax + by + cz + 1 = 0$ et vice-versa. A une droite D on associe une autre droite qui est l'intersection des plans associés aux points de D. (Tout ce ceci, c'est bien sûr de la dualité en géométrie projective).

Bon, mais un polyèdre étant grosso modo un ensemble de points, de droites et de plans, on peut bien lui associer son conjugué.

Grâce à cette conjugaison, si on sait qu'il existe seulement 13 polyèdres archimédiens alors il existe 13 polyèdres ayant les propriétés duales:

- Pour chaque sommet S, l'ensemble des demi-droites issues de S est régulier.
- Toutes les faces sont identiques

Les faces ne sont donc pas forcément régulières. Mais comme elles sont toutes identiques ces polyèdres sont bien connus des joueurs...

Tous les cotés ne sont pas égaux, mais par contre la première propriété montre que tous les angles de plans entre les faces sont, quant à eux, égaux. Donc il y aura toujours un seul angle `Rotation`, par contre il faut rajouter un paramètre `Pas` qui va changer comme les angles.

Les polyèdres archimédiens avaient leurs sommets tous égaux, ils sont donc inscrits dans une sphère, les polyèdres conjugué eux sont circonscrits à une sphère (ce sont leurs faces qui sont tangentes à la sphère).

La grammaire passe très bien à la conjugaison, les symboles vont donc représenter cette fois-ci des sommets *arêtés*. La structure de la grammaire est la même sauf que l'on remplace l'instruction de tracé `[*X]F+` (resp. `[/X]F+`) par `[F|X]*+` (resp. `[F|X]/`). On peut donc obtenir l'octaèdre en transformant la grammaire du cube

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
```

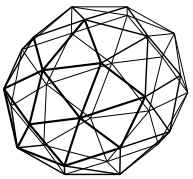
en :

```
Axiome: X
X --> [F|Y]*+[F|Y]*+[F|Y]*+[F|Y]
Y --> [F|X]/-[F|X]/-[F|X]/-[F|X]
Angle 60
Rotation 70.52
```

Voici donc les résultats

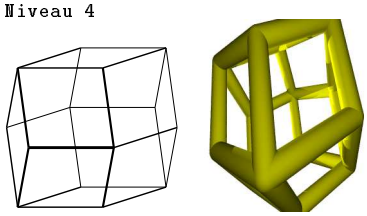
ballon conjugué

```
Axiome T
X --> 0[F|V]*+[F|V]*+[F|V]*+[F|V]*+[F|V]
T --> 1[OF|Y]*+[F|W]*+[OF|Y]*+[F|W]*+[OF|Y]*+[F|W]
U --> 1[F|W]*+[OF|Y]*+[F|W]*+[OF|Y]*+[F|W]*+[OF|Y]
Y --> 0[F|T]/-[F|T]/-[F|T]/-[F|T]/-[F|T]
V --> 1[OF|X]/-[F|U]/-[OF|X]/-[F|U]/-[OF|X]/-[F|U]
W --> 1[F|U]/-[OF|X]/-[F|U]/-[OF|X]/-[F|U]/-[OF|X]
Angle  68.61 55.69
Rotation 23.28 23.28
Pas 1.0746 1.2106
Niveau 5
```



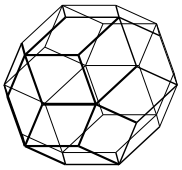
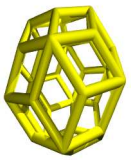
Cubooctaèdre conjugué

```
Axiome H
G --> 0[F|H]*+[F|H]*+[F|H]
H --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 109.47 70.52
Rotation 60 60
Pas 1 1
Niveau 4
```



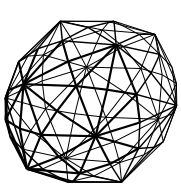
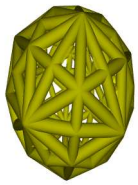
Polyèdre de Romé de l'Isle

```
Axiome H
G --> 0[F|H]*+[F|H]*+[F|H]
H --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 63.43 116.56
Rotation 36 36
Pas 1
Niveau 6
```

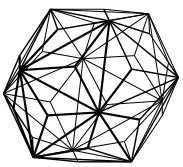
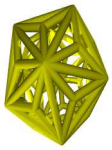
Triacontadoèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G -->
  0[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]
H -->
  0[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]
I --> 1[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]
J --> 1[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]
K --> 2[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]
L --> 2[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]
g -->
  0[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]
h -->
  0[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]
i --> 1[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]
j --> 1[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]
k --> 2[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]
l --> 2[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]
Angle 32.77 58.23 88.99
Rotation 15.11 15.11 15.11
Pas  0.9998 0.5412 0.8502
Niveau 6
```

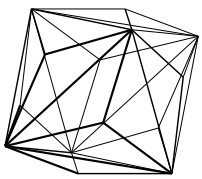
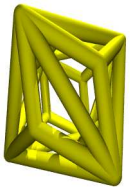
Dodécaèdre tronqué conjugué

```
Axiome G
G -->
  0[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H -->
  0[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g -->
  0[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h -->
  0[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 30.48 119.03
Rotation 19.38 19.38
Pas 1.7485 1.0144
Niveau 4
```

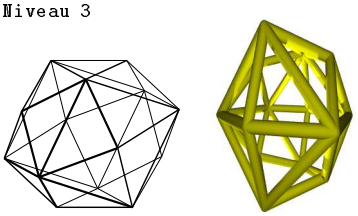
cube adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H --> 0[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g --> 0[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h --> 0[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 31.39 117.20
Rotation 32.64 32.64
Pas 1.77 1.04
Niveau 3
```

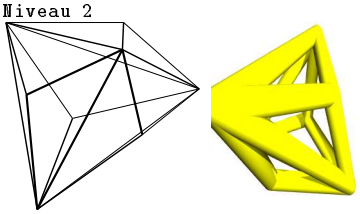
Octaèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H --> 0[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g --> 0[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h --> 0[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 48.18 83.62
Rotation 36.86 36.86
Pas 1.9876 1.4907
Niveau 3
```



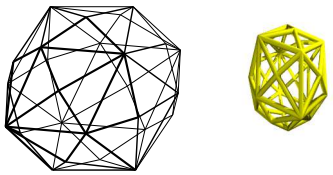
Tétraèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H --> 0[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g --> 0[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h --> 0[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 33.5573 112.8853
Rotation 50.4788 50.4788
Pas   1.8090 1.0854
Niveau 2
```



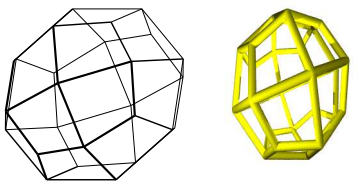
cubooctaèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]
H --> 0[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]
I --> 1[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]
J --> 1[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]
K --> 2[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]
L --> 2[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]
g --> 0[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]
h --> 0[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]
i --> 1[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]
j --> 1[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]
k --> 2[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]
l --> 2[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]
Angle 37.77 55.02 87.20
Rotation 24.91 24.91 24.91
Pas 1.9976 1.2250 1.6387
Niveau 4
```



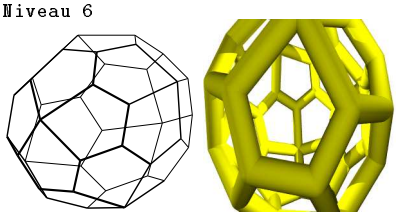
cubooctaèdre tronqué conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 0[F|g]*+[1F|j]*+[F|g]*+[1F|j]
I --> 0[1F|j]*+[F|g]*+[1F|j]*+[F|g]
J --> 1[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 0[F|G]/-[1F|J]/-[F|G]/-[1F|J]
i --> 0[1F|J]/-[F|G]/-[1F|J]/-[F|G]
j --> 1[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 81.57 115.26
Rotation  41.88  41.88
Pas 1.5307 1.1839
Niveau 4
```



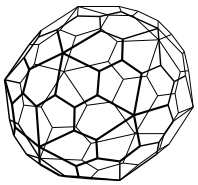
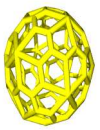
Cube transformé conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 2[OF|g]*+[F|j]*+[1F|k]
I --> 2[1F|k]*+[OF|g]*+[F|j]
J --> 2[F|j]*+[1F|k]*+[OF|g]
K --> 1[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 2[OF|G]/-[1F|K]/-[F|J]
i --> 2[1F|K]/-[F|J]/-[OF|G]
j --> 2[F|J]/-[OF|G]/-[1F|K]
k --> 1[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 80.75  114.81 114.81
Rotation  43.69 43.69 43.69
Pas 0.7718 0.5436 0.5436
Niveau 6
```



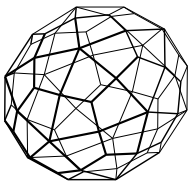
Dodécaèdre transformé conjugué

```
Axiome G
G --> O[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 2[OF|g]*+[F|j]*+[1F|k]
I --> 2[1F|k]*+[OF|g]*+[F|j]
J --> 2[F|j]*+[1F|k]*+[OF|g]
K --> 1[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> O[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 2[OF|G]/-[1F|K]/-[F|J]
i --> 2[1F|K]/-[F|J]/-[OF|G]
j --> 2[F|J]/-[OF|G]/-[1F|K]
k --> 1[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 67.45 118.13  118.13
Rotation 26.82 26.82 26.82
Pas 0.9005 0.5146 0.5146
Niveau 9
```

polyconj13 Triacontadoèdre tronqué conjugué

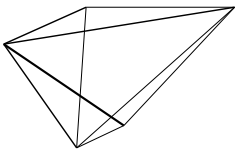
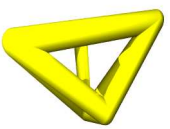
```
Axiome G
G --> O[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[F|g]*+[2F|j]*+[F|g]*+[2F|j]
I --> 1[2F|j]*+[F|g]*+[2F|j]*+[F|g]
J --> 2[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> O[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[F|G]/-[2F|J]/-[F|G]/-[2F|J]
i --> 1[2F|J]/-[F|G]/-[2F|J]/-[F|G]
j --> 2[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 67.78 86.97  118.26
Rotation 25.87 25.87 25.87
Pas 1.7933 1.7933 1.1649
Niveau 6
```



Il y a aussi les conjugués des prismes !!!

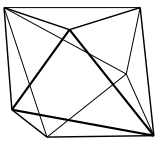
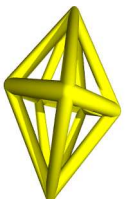
Prisme à faces carrées conjugué

```
Axiome G
G --> O[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[OF|g]*+[F|i]*+[OF|g]*+[F|i]
I --> 1[F|i]*+[OF|g]*+[F|i]*+[OF|g]
g --> O[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[OF|G]/-[F|I]/-[OF|G]/-[F|I]
i --> 1[F|I]/-[OF|G]/-[F|I]/-[OF|G]
Angle 97.18 41.40
Rotation 81.78 81.78
Pas 1.0079 1.5118
Niveau 2
```

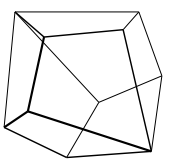
Prisme à faces carrées conjugué

```
Axiome G
G --> O[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[OF|g]*+[F|i]*+[OF|g]*+[F|i]
I --> 1[F|i]*+[OF|g]*+[F|i]*+[OF|g]
g --> O[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[OF|G]/-[F|I]/-[OF|G]/-[F|I]
i --> 1[F|I]/-[OF|G]/-[F|I]/-[OF|G]
Angle 40.42 69.78
Rotation 60.89 60.89
Pas 1.5421  1.0656
Niveau 2
```

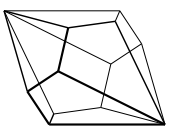
Prisme à faces triangulaires conjugué

```
Axiome G
G --> O[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[OF|g]*+[F|j]*+[F|i]
I --> 1[F|j]*+[F|i]*+[OF|g]
J --> 1[F|i]*+[OF|g]*+[F|j]
g --> O[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[OF|G]/-[F|J]/-[F|I]
i --> 1[F|J]/-[F|I]/-[OF|G]
j --> 1[F|I]/-[OF|G]/-[F|J]
Angle 54.14 101.95
Rotation 74.85 74.85
Pas 2.1973 1.2871
Niveau 3
```



Prisme à faces triangulaires conjugué

```
Axiome G
G --> O[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[OF|g]*+[F|j]*+[F|i]
I --> 1[F|j]*+[F|i]*+[OF|g]
J --> 1[F|i]*+[OF|g]*+[F|j]
g --> O[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[OF|G]/-[F|J]/-[F|I]
i --> 1[F|J]/-[F|I]/-[OF|G]
j --> 1[F|I]/-[OF|G]/-[F|J]
Angle 36 108
Rotation 63.43 63.43
Pas 3.23 1.23
Niveau 3
```



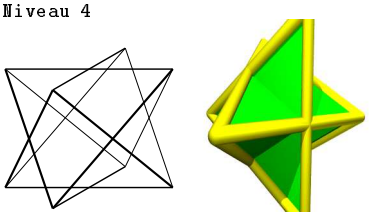
Les autres En ce qui concerne les étoiles archimédiennes (c'est la même chose que les polyèdres archimédiens sauf qu'on enlève l'hypothèse de convexité)

on peut sûrement les obtenir avec exactement les mêmes grammaires mais avec des angles différents malheureusement je n'ai pas trouvé de méthode systématique pour le faire.

Pour les polyèdres réguliers composés (on autorise cette fois la non-connexité [en tant que graphe]) j'ai seulement trouvé la grammaire de l'anticube. En fait il s'agit juste de recoller les grammaires correspondant aux différents polyèdres composant le polyèdre.

Anticube

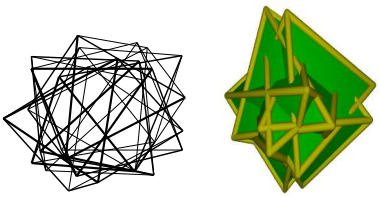
```
Axiome 1[*X]f+f|[*X]
X --> 0[*Y]F#+[*Y]F#+[*Y]F#=
Y --> 0[/X]F#+[/X]F#+[/X]F#=
Angle 120 90
Rotation  70.52  54.73
Pas 3  1.5
Niveau 4
```



L'étoile octaèdrique (icosaèdre double de cinquième espèce constitué de cinq octaèdres[1] est peut-être obtenue par la grammaire suivante :

etoiloctaedrique

```
Axiome: G
G --> [X][1f-f0+X]1/-0[1f-f0+X]1/-0[1f-f0+X]1/-0[1f-f0+X]1/-0
X --> 0[*Y]F#+[*Y]F#+[*Y]F#=
Y --> 0[/X]F#+[/X]F#+[/X]F#=
Angle 120 75.522487814070076121228965l7
Rotation  109.47 70.52
Pas 3.70 1.02
Niveau 5
```



Pour en savoir plus...

[B] Marcel Berger, *Géométrie*, vol. 3, Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, Nathan, 1977.

[J] Louis Joly, *Les polyèdres : réguliers, semi-réguliers et composés*, Blanchard, 1979.

On trouvait des choses sur les L-systèmes sur Internet, les seules adresses qui sont encore valides sont :

- Des exemples de L-systemes 2D : `http://weblifac.ens-cachan.fr:80/~alf/LSystem/LSystem.html`
- La page que j'avais a Cachan a été transportée à cette adresse : `http://llaic3.u-clermont1.fr/daurat/poly/polye.html`

1. en fait il a 40 faces mais chaque plan facial contient deux faces, on dit donc qu'il a 20 faces doubles

Théorie topologique des champs

Vincent Zoonekynd
zoonek@math.jussieu.fr

Résumé

Intégrale de Feynman

Tentons d'expliquer ce qu'est l'intégrale de Feynman en physique et comment elle est utilisée. Que ceux qui sont allergiques à ce domaine passent au point suivant.

On peut voir la mécanique quantique comme une branche des probabilités. En effet, une particule quantique n'est pas à un endroit connu très précisément, mais « un peu partout, peut-être un peu plus ici que là ». Si sa position n'est pas connue, on connait par contre la probabilité qu'elle soit à un endroit donné.

On peut alors faire des expériences et tenter de les interpréter : prenons par exemple celle des fentes d'Young. On fait passer de la lumière à travers deux fentes et on observe, ô surprise, une figure d'interférence, c'est à dire des bandes alternativement sombres et lumineuses et non pas, comme on aurait pu s'y attendre, une zône plus claire, uniformément claire, là où les lumières provenant des deux fentes se superposent. On avait envie d'ajouter les probabilités, mais apparemment elles ne s'ajoutent pas.

Le physicien résout le problème ainsi : la probabilité (nombre entre zéro et un) n'est que ce que l'on voit *in fine*. Lorsqu'il n'y a pas d'« interférence », on peut se contenter de ne considérer que des probabilités. Par contre, en cas d'interférence, il faut considérer l'*amplitude* de probabilité — un nombre complexe dont le carré du module égale la probabilité, et ajouter ces amplitudes de probabilités.

Les probabilités s'utilisaient aussi pour calculer des moyennes de quantités physiques (la vitesse, l'énergie, etc.). En cas d'interférence, on remplace aussi les probabilités par les amplitudes de probabilité. Pour une particule allant d'un point A à un point B, suivant un chemin φ, l'amplitude de probabilité est généralement de la forme $\exp S(\varphi)$, où S est l'*action*, c'est-à-dire le lagrangien de la mécanique classique. La moyenne d'une quantité physique est alors

$$\langle A \rangle = \int A(\varphi) \exp S(\varphi) \, \mathcal{D}\varphi .$$

On intègre sur l'ensemble de tous les chemins de A à B. S'il n'y en a qu'un nombre fini (comme dans le cas des fentes d'Young), c'est parfaitement licite ; mais en général, on est amené à intégrer sur un espace affine de dimension infinie et les choses n'ont généralement pas de sens mathématique.

On remarquera qu'il s'agit d'une intégrale oscillante (dont l'intégrande est de la forme $\exp(i\varphi)$), donc d'après la méthode de la phase stationnaire, la contribution la plus grande provient des points stationnaires de l'action : on retrouve donc le cas classique, dans lequel l'action est stationnaire pour les trajectoires effectivement empruntées par la particule.

Présentation mathématique

Nous cherchons à classer et à distinguer des variétés topologiques. Pour ce faire, nous désirons construire des *invariants*, *i.e.*, des nombres, des objet algébriques (groupes, espaces vectoriels) ou analytiques (fonctions, séries formelles) qui soient égaux (ou isomorphes) pour des variétés isomorphes. On peut penser à la dimension, à la caractéristique d'Euler, aux groupes d'homotopie, à l'algèbre de cohomologie.

Il peut s'avérer plus facile de définir un invariant si la variété n'est pas simplement une variété topologique, mais est munie d'une structure supplémentaire, par exemple une structure riemannienne (c'est-à-dire un moyen de mesurer les distances et les angles). Comme notre intérêt se porte sur les variétés topologiques, il va falloir par la suite se débarasser de cette structure supplémentaire, par exemple en faisant la « moyenne » des invariants obtenus pour toutes les structures supplémentaires possibles. Il s'agit donc d'intégrer sur l'ensemble de toutes ces structures, généralement l'espace des sections d'un fibré – le problème, c'est qu'il s'agit d'un espace affine de dimension infinie...

Cela n'a pas géné les physiciens : nous allons donc regarder ce qu'ils font, essayer de comprendre quelles sont les raisons pour lesquelles ça a l'air de marcher et essayer de définir quelque chose d'autre, qui ait la même utilité, mais qui cette fois ait un sens.

Prenons une variété orientée M fermée (*i.e.*, compacte et sans bord) de dimension d. Pour chaque « structure supplémentaire » on peut obtenir un invariant numérique (par exemple, la courbure de la

structure riemannienne, ou n'importe quoi d'autre). En faisant varier cette structure supplémentaire et en intégrant cet invariant sur l'espace de toutes les structures supplémentaires on obtient un invariant de notre variété *sans* sa structure supplémentaire. Notons-le $Z(M)$.

Nous demandons que l'« intégrande », c'est-à-dire l'invariant de la variété avec une structure supplémentaire, soit locale :

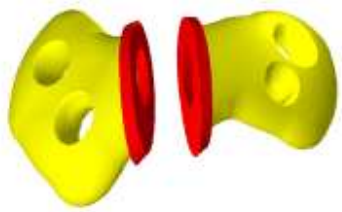
(i) La structure supplémentaire sur nos variétés peut se restreindre : si on coupe une variété en deux, chaque morceau se retrouve avec une structure de ce type et le bord (qui est une variété de dimension moindre) aussi. Les structures sur les composantes « opposées » du bord coïncident (à l'orientation près).

(ii) Si on a deux variétés à bord dont les structures sur les bords coïncident (à l'orientation près), alors on peut les recoller et obtenir une variété munie d'une telle structure.

(iii) Notre invariant est multiplicatif par rapport à la somme disjointe : si M_1 et M_2 sont des variétés fermées, alors $Z(M_1 \sqcup Z_2) = Z(M_1)Z(M_1)$. On peut voir la multiplicativité comme une sorte de théorème de Fubini : l'invariant $Z(M)$ de M est une intégrale sur l'ensemble des « structures supplémentaires » sur M, or cet ensemble est le produit cartésien des ensembles de structures supplémentaires sur M_1 et M_2.

Essayons de raisonner heuristiquement sur un exemple. Prenons une variété M. Elle peut être compliquée, comme dans la figure suivante.

Pour tenter de simplifier le calcul de $Z(M)$ nous allons découper notre variété en morceaux plus simples.



Le problème, c'est qu'on se retrouve avec des variétés à bord, or notre invariant n'est défini que pour des variétés fermées.

Rappelons-nous que la structure supplémentaire que l'on met sur M se restreint au bord ∂M. La valeur de $Z(M)$ est donc la moyenne du produit $Z(M_1, A)Z(M_2, A)$, où A parcourt l'ensemble des structures possibles sur le bord (sur le dessin, il y a deux composantes connexes dans le bord, qui diffèrent par l'orientation : on prendra des structures supplémentaires qui ne diffèrent que par l'orientation). On peut écrire

$$Z(M) = \sum_A Z(M_1, A)Z(M_2, A).$$

Ça ressemble un peu à un produit scalaire, ou à la dualité entre un espace vectoriel et son dual. Écrivons donc

$$Z(M) = \langle Z(M_1) |\, Z(M_2) \rangle \,.$$

Nous avons simplement utilisé le caractère « local » de l'intégrande, *i.e.*, de notre structure supplémentaire.

Réfléchissons un peu sur ce que nous avons fait. Nous cherchions à calculer un invariant *numérique* $Z(M)$ d'une variété M de dimension d. Nous avons découpé la variété en deux et nous récupérons $Z(M)$ comme un produit de dualité entre deux vecteurs $Z(M_1)$ et $Z(M_2)$ associés aux deux morceaux (des variétés à bord de dimension d). Ces vecteurs sont dans les espaces vectoriels duaux V et V^* associés aux bords Σ et $-\Sigma$, variétés de dimension $d-1$ qui ne diffèrent que par l'orientation.

Nous pouvons maintenant formaliser les idées heuristiques précédentes. Une *théorie topologique des champs* en dimension d est la donnée

(i) pour toute variété Σ de dimension $d-1$, d'un espace vectoriel $Z(\Sigma)$;

(*ii*) pour toute variété M de dimension d, d'un vecteur $Z(M) \in Z(\partial M)$ dans l'espace vectoriel déterminé par son bord ;

telle que

(*i*) quand le bord est vide, on obtienne l'invariant *numérique* des variétés sans bord que l'on cherchait, *i.e.*,

$$Z(\varnothing) = \mathbf{C} ;$$

(*ii*) renverser l'orientation corresponde à « passer au dual », *i.e.*,

$$Z(-\Sigma) = Z(\Sigma)^* ;$$

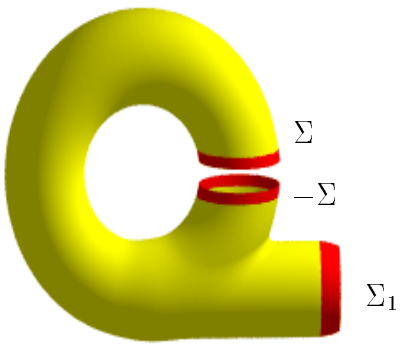
(*iii*) notre invariant soit multiplicatif, *i.e.*,

$$Z(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)$$

et

$$Z(M_1 \sqcup M_2) = Z(M_1) \otimes Z(M_2) \in Z(\Sigma_1 \otimes Z(\Sigma_2) ;$$

(*iv*) le recollement s'interprète comme la contraction des facteurs que l'on recolle, par exemple, dans le cas



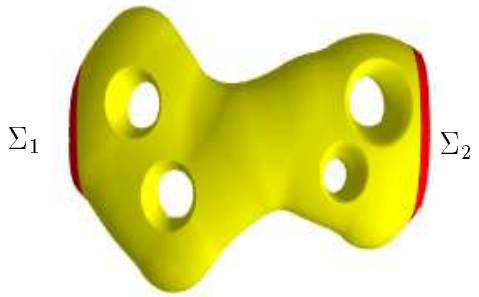
le morphisme

$$\begin{cases} Z(\Sigma)^* \otimes Z(\Sigma) \otimes Z(\Sigma_1) & \longrightarrow & Z(\Sigma_1) \\ f \otimes x \otimes z & \longmapsto & f(x)z \end{cases}$$

envoie $Z(M)$ sur $Z(M')$.

Certains remarqueront à juste titre que j'ai un peu simplifié les choses en oubliant les isomorphismes de variétés – il faut en tenir compte.

Considérons deux variétés Σ_1 et Σ_2 de dimension $d-1$. Une variété de dimension d dont le bord soit la réunion de Σ_1 et Σ_2 est appelée un *cobordisme* de Σ_1 à Σ_2.



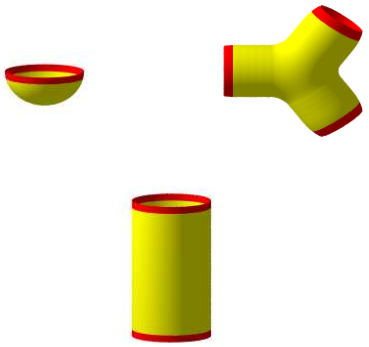
On peut composer des cobordismes en les recollant (ici aussi, je simplifie en négligeant les isomprhismes). Remarquons maintenant aussi que comme

$$Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) = \mathrm{Hom}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2)),$$

on peut associer à chaque cobordisme de Σ_1 vers Σ_2 un morphisme de $Z(\Sigma_1)$ dans $Z(\Sigma_2)$. On peut donc voir l'invariant Z comme un « foncteur » de la catégorie des variétés de dimension $d-1$ avec pour morphismes les cobordismes à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels.

Exemple

En dimension deux, il est possible de classer les théories topologiques des champs. Il suffit de remarquer que l'on peut obtenir une surface à partir des briques suivantes.

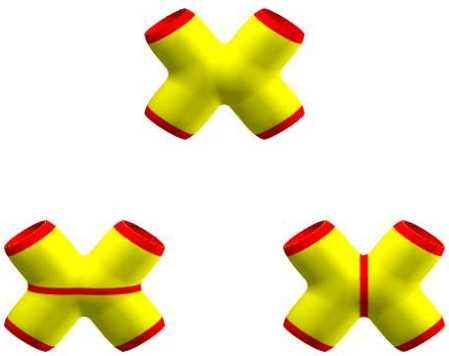


Si on note V l'espace vectoriel associé au cercle (c'est la seule variété connexe de dimension $1 = 2-1$ et grace à la multiplicativité, il suffit de se limiter aux variétés connexes), les cobordismes précédents correspondent à

– un élément 1 de V ;

– un élément t de $V \otimes V \otimes V$;
– un élément μ de $V \otimes V$.

Remarquons aussi que l'on peut obtenir une surface de plusieurs manières à partir des briques élémentaires.



Ces différents recollements correspondent à différentes « combinaisons » de 1, t et μ, mais ne correspondent qu'à un unique cobordisme : les différentes expressions en 1, t et μ doivent être égales. On peut énumérer (je ne le ferai pas) toutes ces relations et s'apercevoir qu'elles confèrent à V une structure d'algèbre.

Réciproquement, on peut vérifier qu'étant donné une algèbre (en fait, il faut une condition supplémentaire sur cette algèbre, mais oublions-la) on peut construire une théorie topologique des champs de dimension deux.

En dimensions supérieures

On peut généraliser tout cela aux dimensions supérieures. Mais comment continuer : on a un nombre en dimension d, un espace vectoriel en dimension $d-1$, et après?

Remarquons les choses suivantes.

– À une variété de dimension d on associe un nombre, *i.e.*, un élément de l'espace vectoriel (bien particulier) $\mathbf{C}$.
– À une variété de dimension $d-1$ on associe un espace vectoriel, *i.e.*, un élément de la catégorie (bien particulière) des espaces vectoriels.
– À une variété de dimension $d-2$ on associe une catégorie (*i.e.*, un élément de la bicatégorie (bien particulière) des catégories – arrêtons-nous là, ça devient très compliqué).

En dimension trois, on associe au cercle (la seule variété de dimension un qu'il y a à considérer) une catégorie. On peut vérifier que, comme en dimension deux, elle est munie d'une structure supplémentaire (pour ceux qui savent, ce pourrait être la catégorie des représentations d'un groupe ou d'un groupe quantique). Réciproquement, étant donnée une catégorie munie d'une structure similaire, on peut définir des invariants des variétés de dimension trois – les invariants de Reshetikhin–Turaev.

Pour en savoir plus...

[A] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer Verlag, 1989.

[B] J.C. Baez, *An introduction to n-categories*, q-alg/97 05 009.

[FH] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, 1965.

[JQ] A. Jaffe and F. Quinn, *Theoretical mathematics : towards a cultural synthetis of mathematics and theoretical physics*, Bulletin of the American Mathematical Society (1993), 1–13.

[L] R. Lawrence, *An introduction to topological field theory*, The interface of knots and physics (L. Kauffman, ed.), AMS, 1996, pp. 89–128.

[S] L. S. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, Wiley, 1981.

[T] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, W. de Gruyter, 1994.

La numération de Zokpé Zoki

Ayaovi Zokpé Zoki d'Almeida

Introduction

L'infini actuel s'est glissé dans la pensée mathématique, entre autres, par la numération de position. La numération de position à base fixe, approximations indéfinies pour une division par un nombre non diviseur de la base, permettait de concevoir, pour certaines fractions, des écritures indéfinies c'est-àdire sans fin possible. Ceci ne révélait que l'imperfection théorique du système de numération bien que ces système soient du point de vue pratique plus intéressants pour les opérations usuelles surtout pour la multiplication ; mais ceci a amené l'homme à croire aux nombres irrationnels.

Il était normal qu'après mon mémoire « Réflexions sur l'infini », ou les deux articles qui récapitulent l'essentiel de ce mémoire, je recherche une numération de position dans laquelle tout nombre rationnel ait une écriture finie. Je disposais depuis quelques année de cette numération de Zokpé Zoki dont la seule vanité et prétention était de montrer qu'il existe une numération de position dans laquelle toute fraction a une écriture finie et que les numérations de position qui ont le défaut de générer des écritures infinies ne font que traduire une imperfection de leurs concepts, imperfection due à l'existence de nombres premiers et beacoup plus généralement, premiers entre eux c'est-à-dire « incommensurables » en termes d'entiers. L'ambition de ce travail en serait restée là si inopinément je ne découvrais ces derniers jours qu'il y a quatre à six mille ans, la numération connue de l'Égypte pharaonique était la partie esotérique d'une théorie ésotérique sans doute similaire à la numération de Zokpé Zoki. L'assurance des manipulations d'Ahmès, le refus de la numération de position pour les entiers, le refus de l;infini, l'emploi de la même technique pour la décomposition de $2/(n+1)$, l'emploi unique des sommations finies des inverses des exceptées justements les fractions 2/3, 3/4, 5/6, 23/24, ..., la préférence à la duplication, m'ont paru le fait de gens qui disposaient de la numération mixte de Zokpé Zoki ou échelle de travail où toute fraction a une mesure exacte ou système d'approximations toujours finitaires des rapports de nombres entiers.

Les idées mathématiques étant plus intéressantes quand elles peuvent faire autre chose que ce qui les a motivées, l'utilisation des écritures zokiennes des fractions en théorie des nombres se révèle positive. Elle nous permet de singulariser, *i.e.* caractériser les nombres premiers. En effet, en numération de Zokpé Zoki, les inverses des nombres premiers et seulement eux, excepté l'inverse de 4, ont une forme particulière qui les caractérise. Il suffit d'écrire l;inverse d'un nombre en numération de Zokpé Zoki pour savoir si ce nombre est premier. De plus la dimension de l'inverse de n et le nombre entier n lui-même sont « commensurables » ; ce qui permet la connaissance de la décomposition de tout nombre en produits de facteurs, par un jeu d'écritures zokiennes.

Systèmes de numérations

Structure numérable à une loi

Définition. — *On appelle ensemble numérable un quadruplet* $(E, *, \cdot, \leqslant)$ *tel que*

- $(E, \leqslant)$ *soit un ensemble totalement ordonné,*
- $(E, *)$ *soit un monoide régulier vérifiant :*

$$\forall a \in E, \forall b \in E, \quad b \leqslant a \Rightarrow \exists c \in E \quad a = b * c$$

et que la loi $*$ *soit compatible avec* $\leqslant$*,*

- $(E, \cdot)$ *est un ensemble muni de loi externe sur une structure* $(K, +, \cdot, \leqslant)$ *double monoide régulier distributif bien ordonné et vérifiant :*

$$\forall n \in K, \forall m \in K, \forall a \in E, \quad n \leqslant m \Rightarrow na \leqslant ma$$

et où l'on note $s(n)$ *(resp.* $p(n)$*) le successeur (resp. prédécesseur) de* n*,* K *étant au plus dénombrable ; l'élément neutre de l'addition étant noté 0 et celui de la multiplication 1.*

Définition. — *On appelle ensemble numéré* $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$ *une structure telle que :*

1. $(E, *, \cdot, \leqslant)$ *soit un ensemble numérable,*
2. B *soit :*
   - *ou bien, une partie de* E *bien ordonnée vérifiant :*
     - *(a)* $\forall a \in E, \forall b \in B \mid b \leqslant a \leqslant s(b)$ *où* $s(b)$ *est le successeur de* b *pour le bon ordre de* B*,*
     - *(b)* $\forall b \in B, \forall a \in E, \ b \leqslant a < s(b) \Rightarrow \exists n \in \mu(b) \subset K \mid a < b * nb$ *où l'on définit l'ensemble des symboles permis à l'étage* b *par* $\mu(b) = \{n \in K, nb < s(b)\}$*,*

– *ou bien, une partie de E bien ordonnée par l'ordre inverse de E vérifiant :*
  (a) $\forall a \in E, \forall b \in B,\ p(b) > a \geqslant b$, *où $p(b)$ désigne le prédécesseur de b, s'il existe, dans le bon ordre de B,*
  (b) $\forall b \in B, \forall a \in E,\ p(b) > b \geqslant b \Rightarrow \exists n \in \mu(b) \subset K \mid a < b * nb$ *où l'ensemble des symboles permis à l'étage b est défini par* $\mu(b) = \{n \in K,\ nb < p(b)\}$.

On dit aussi que B est une échelle d'écriture montante (resp. descendante) pour les éléments de E par des symboles de K nommés chiffres ou nombres-chiffres suivant que K est numéré ou pas.

Exemple. — $E = \mathbf{N}$, $K = \mathbf{N}$, $B = \{8^n,\ n \in \mathbf{N}\}$, $\mu(8^n) = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Définition. — *On appelle écriture d'un élément x de E dans une numération montante, la suite d'éléments de K indexée par I avec I le cardinal de B, suite obtenue par le procédé de construction suivant : soit $B = (b_n)_{n\in I}$; soit $b_k \in B$ avec $b_k \leqslant x < b_{k+1}$; u_0 est le plus petit élément de $\mu(b_k)$ tel que $x \leqslant b_k * u_0 b_k$. Soit r_0 tel que $x = u_0 b_k * r_0$; si l'on a $r_0 < b_{k-1}$ alors $u_1 = 0$ sinon u_1 est le plus petit élément de $\mu(b_{k-1})$ tel que $r_0 \leqslant b_{k-1} * u_1 b_{k-1}$. Soit r_1 tel que $r_0 = u_1 b_{k-1} * r_1$. Si l'on a $r_1 < b_{k-2}$ alors $u_2 = 0$, et ainsi de suite.*

Définition. — *On appelle écriture d'un élément x de E dans une numération descendante, la suite d'éléments de K indexée par I avec I le cardinal de B, suite obtenue par le procédé de construction suivant : soit $B = (b_n)_{n\in I}$; soit $b_k \in B$ avec $b_k \leqslant x < b_{k-1}$; u_0 est le plus petit élément de $\mu(b_k)$ tel que $x \leqslant b_k * u_0 b_k$. Soit r_0 tel que $x = u_0 b_k * r_0$; si l'on a $r_0 < b_{k+1}$ alors $u_1 = 0$ sinon u_1 est le plus petit élément de $\mu(b_{k+1})$ tel que $r_0 \leqslant b_{k+1} * u_1 b_{k+1}$. Soit r_1 tel que $r_0 = u_1 b_{k+1} * r_1$. Si l'on a $r_1 < b_{k+2}$ alors $u_2 = 0$, ainsi de suite.*

Définition. — *Soit un ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$. Soit x un élément de E ; si l'écriture de x est telle qu'il existe un rang n à partir duquel la construction de la suite (u_n) s'arrête ou est stationnaire avec pour valeur 0 alors la longueur de l'écriture de x est n, sinon la longueur est le cardinal de B (souvent infini).*

Définition. — *Soit un ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$ sous-ensemble d'une structure $(F, *, \leqslant)$, tel qu'il existe un monomorphisme de $(C_F(E), *, \leqslant)$ dans $(E, *, \leqslant)$. On dit que F est numéré par convention d'écriture si l'on se donne un symbole $*^{-1}$ et l'on convient d'écrire tout élément x de F de la façon suivante : si x est élément de E alors l'écriture dans F de x est son écriture dans la numération $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$ précédée du symbole $*$. Si x n'est pas élément de E alors l'écriture dans F de x est celle de son image, par le monomorphisme, précédée du symbole $*^{-1}$.*

Type d'échelle d'écriture ou de numération

Soit un ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$. Soit $\mu : B \to P(K)$ l'application qui à tout élméent b de B associe $\mu(b)$ l'ensemble des symboles permis à l'étage b.

Définition. — *Si $\mu : B \to P(K)$ est une application constante alors on a une écriture à base fixe. On conviendra de nommer base l'élément* $\inf C_K(\mu(b))$ *si $\mu(b) \neq K$ et si $\mu(b) = K$ on a une échelle d'écriture à base totale.*

Si $\mu \to P(K)$ est une application non constante mais que pour tout b élément de B on a $\mu(b)$ qui est un ensemble fini alors on a une échelle d'écriture à base fluctuante ou variable. Et la base de l'étage b est l'élément $\inf C_K(\mu(b))$ si $\mu(b) \neq K$.

Si $\mu : B \to P(K)$ est une application monotone et que pour tout élément b de B, l'ensemble $\mu(b)$ est fini alors on a une échelle d'écriture à base variable monotone.

Définition. — *Si la longueur d'écritue de tout élément est finie alors l'échelle est dite finitaire.*

Structure numérable à n lois

Définition. — *Un ensemble n-numéré est une structure $(E, *, \leqslant)$ telle que :*

– *il existe une famille $(E_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ de sous-ensembles de E et pout tout i $(E_i, *, \cdot, \leqslant, B)$ soit un ensemble numéré,*
– $\forall x \in E, \forall i \in \{0, ..., n-1\}\ \ \exists x_i \in E_i$ *avec $x = x_0 * ... * x_{n-1}$. L'éciture de l'élément x de E est l'alignement des chiffres des x_i séparées par des virgules et dans l'ordre,*

Définition. — *Si pour tout i on a un même type d'échelle d'écriture « α » alors la structure numérée $(E, *_0, ..., *_{n-1})$ est de type n-« α » ou la n-échelle d'écriture « α ».*

Définition. — *Si pour tout i, l'écriture sur E_i est finitaire alors la structure numérée est dite une écriture n-finitaire.*

Définition. — *La longueur d'écriture d'un élément x est la somme des longueurs de ses composantes.*

Le lecteur définira les structures de numération par convention.

Exemples de numération

1. Soit $\mathbf{N}$ muni de l'écriture décimale : c'est une échelle d'écriture montante finitaire à base fixe et finie. $K = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$, $B = \{1, 10, ..., 10^i, ...\}$, $\forall i \in \mathbf{N}\ \mu(10^i) = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.
2. Soit $[0, 1[$ muni de l'écriture décimale : c'est une échelle descendante à base fixe. $K = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$, $B = \{1, 10^{-1}, ..., 10^{-i}, ...\}$, $\mu(10^{-i}) = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.
3. Soit $\mathbf{Q} \cap]0, 1]$ muni de l'écriture p/q avec $p < q$: c'est une échelle d'écriture descendante à base variable monotone. $K = \mathbf{N}$, $B = \{1, 2^{-1}, ..., n^{-1}, ...\}$, $\forall n > 1\ \mu(1/n) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
4. Soit $\mathbf{Q}_+$ muni de l'écriture p/q, $q \neq 0$, p et q premiers entre eux : c'est une échelle d'écriture descendante variable infinie. $K = \mathbf{N}$, $B = \{1, 2^{-1}, ..., n^{-1}, ...\}$, $\mu(1/n) = \mathbf{N} - \{km, k \in \mathbf{N}^*, m|n\}$, $\mu(1) = \mathbf{N}$.
5. Soit $\mathbf{Q}_+$ muni de l'écriture $a \cdot p/q$: c'est une 2-échelle d'écriture avec $\mathbf{N}$ muni de l'écriture décimale et $\mathbf{Q}_+ \cap]0, 1]$ muni de l'écriture p/q avec $p < q$.
6. Soit $\mathbf{Q}_+$ muni de l'écriture décimale : c'est une 2-échelle d'écriture à base fixe avec $\mathbf{N}$ muni de l'écriture décimale et $\mathbf{Q} \cap [0, 1[$ muni de l'écriture décimale.

Numération de Zoki

Les numérations de Zokpé Zoki sont des numérations à bases variables monotones sur des parties essentielles de $\mathbf{Q}_+$ permettant de mettre une 2-échelle d'écriture sur $\mathbf{Q}_+$ et de numérer $\mathbf{Q}$ par convention.

Numération d'ordre m

Définition. — *La numération de Zoki d'ordre $m > 0$, sur $\mathbf{N}$ est la numération montante définie sur $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ par la donnée de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ et de la partie $B = \{0, 1!, (2!)^m, ..., (n!)^m, ...\}$. On notera que seul le nombre 0 vérifie $0 \leqslant 0 < 1$, d'où pratiquement pour l'écriture de position pour les nombres strictement positifs on utilisera plutôt $B' = \{1!, (2!)^m, ..., (n!)^m, ...\}$. L'écriture de 0 étant 0.*

Convention d'écriture. Dans une telle numération de position, chaque élément de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ est un symbole même si ce nombre est exprimé dans une autre numération, par exemple la décimale. Ainsi donc, dans une telle numération, les nombres-chiffres seront séparés par des points qui délimiteront les positions. On pourrait aussi les séparer par des tirets.

On adoptera de surcroît les conventions suivantes :

- un nombre écrit avec les chiffres habituels sans ponctuation est un nombre entier écrit dans la base 10, comme 68 750 ;
- un nombre écrit avec les ponctuations (avec des chiffres habituels ou des nombres-chiffres) est un nombre écrit en numération de Zokpé Zoki. Exemple : 1.17.0.0.1 repésente le nombre d'écriture base 10 38 593 en numération d'ordre 2 de Zoki ou le nombre d'écriture base 10 3 691 009 en numération d'ordre 3 de Zoki. De surcroît la lecture des positions se fera de droite à gauche. Ainsi 1 est le premier nombre-chiffre et 17 en est le quatrième. L'écriture ou la lecture même du nombre se faisant de gauche à droite ;
- pour les nombres représentés par des lettres ou des symboles, $(n)_{Z\,m}$ signifie nombre entier n écrit en numération Zoki d'ordre m ; $Z_p^m(n)$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture de l'entier n en numération d'ordre m de Zoki ;
- $(2.17.0.0.1)_{Z\,3}$ signifie « l'écriture de Zoki est en numération d'ordre 3 » soit représente le nomnbre entier 3 691 009 et $Z_4^m(2.17.0.0.1) = 17$.

Définition. — *La numération stricte de Zoki d'ordre $m > 0$, sur $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombre entiers est la numération montante définie sur $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ par la donnée de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ et de la partie $B = \{0, 1!!, (2!!)^m, ..., (n!!)^m, ...\}$. $n!!$ est le produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.*

Convention. Pour les nombres représentés par des lettres ou des symboles, $(n)'_{Z\,m}$ signifie nombre entier écrit en numération stricte de Zoki d'ordre m ; $Z_p^m(n)'$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture de l'entier n en numération stricte d'ordre m de Zoki.

Définition. — *La numération de Zoki d'ordre $m > 0$, sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ est la numération descendante définie sur $(\mathbf{Q} \cap]0,1], +, \cdot, \leqslant)$ par la donnée de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ et la partie $B = \{1, (2!)^{-m}, ..., (n!)^{-m}, ...\}$. On notera que seul le nombre 1 vérifie $1 \leqslant 1$ d'où pratiquement pour l'écriture de position pour les nombres strictement inférieurs à 1 on utilisera plutôt $B' = \{(2!)^{-m}, ..., (n!)^{-m}, ...\}$. L'écriture de 1 est 1.*

Convention d'écriture. Dans une écriture de position, chaque élément de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ est un symbole même si ce nombre est exprimé dans une autre numération, par exemple la décimale. Ainsi, les nombres-chiffres seront séparés par des points qui délimiteront les positions.

On adoptera de surcroît les conventions suivantes :

- on gardera l'habitude d'écrire, en numération de position, les nombres rationnels non entiers de $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ en précédant leur vraie écriture de « 0, ». Exemple : 0,15 ;
- un nombre écrit avec les chiffres habituels sans ponctuation est un nombre écrit en base 10. Exemple : 0,687 50 ;
- un nombre écrit avec des ponctuations (avec des chiffres habituels ou des nombres-chiffres) est un nombre écirt en numération de Zokpé Zoki. Exemple : 0,1.2.0.0.3 écriture qui représente le nombre 52801/172800 en numération d'ordre 2 de Zoki ou qui représente le nombre 67/80 en numération d'ordre 1 de Zoki. De plus la lecture des positions se fera de gauche à droite. Ainsi 1 est le premier nombre-chiffre et 3 en est le cinquième. L'écriture ou la lecture même du nombre se faisant aussi de gauche à droite ;
- pour les nombres écrits ou représentés par des lettres ou des symboles, $(x)_{Z\,m}$ signifie nombre rationnel x écrit en numération de Zoki ; $Z_p^m(x)$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture du rationnel x en numération d'ordre m de Zoki. Exemple : $(0, 1.2.0.0.3)_{Z\,3}$ signifie « l'écriture de Zoki en numération d'ordre 3 » soit représente le nombre 16 704 001/124 416 000 et $Z_2^m(0, 1.2.0.0.3) = 2$.

Définition. — *La numération stricte de Zoki d'ordre $m > 0$ $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ est la numération descendante définie sur $(\mathbf{Q} \cap]0,1], +, \cdot, \leqslant)$ par la donnée de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ et de la partie $B = \{1, (2!!)^{-m}, ..., (n!!)^{-m}, ..\}$.*

Convention. On conviendra d'appeler numération de Zoki, sans précision d'ordre, la numération d'ordre 1. De même $(0, 1.2.0.0.3)_Z$ signifie « l'écriture de Zoki est en numération d'ordre 1 ». $Z_p(n)$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture de l'entier n en numération de Zoki. Le lecteur retrouvera lui-même les conventions analogues en numération stricte.

Définition. — *La numération de Zoki sur $\mathbf{Q}_+$ est la 2-échelle d'écriture définie par la numération de Zoki sur $\mathbf{N}$ et la numération de Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$.*

Définition. — *La numération de Zoki sur $\mathbf{Q}$ est la numération par convention obetnue de celle de $\mathbf{Q}_+$.*

Définition. — *La numération mixte de Zoki sur $\mathbf{Q}_+$ est la 2-échelle d'écriture définie par la numération décimale sur $\mathbf{N}$ et la numération de Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$.*

Définition. — *La numération mixte de Zoki sur $\mathbf{Q}$ est la numération par convention obtenue de celle, mixte, de $\mathbf{Q}_+$.*

Numération de Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$

Conversion ou écriture

Soit $x = p/q$ une fraction avec $p < q$, $(p,q) \in \mathbf{N}^2$. L'algorithme de conversion ou division zokienne de p par q s'opère ainsi : faire la division usuelle de $2p$ par q ; on obtient $2p = u_1 q + r_1$. $Z_1(x) = u_1$. Faire la division usuelle de $3r_1$ par q ; obtient $3r_1 = u_2 q + r_2$. $Z_2(x) = u_2$. Ensuite faire la division normale de $4r_2$ par q ; on obtient $4r_2 = u_3 q + r_3$. $Z_3(x) = r_3$. Ainsi de suite ... jusqu'au premier reste nul r_k. Alors : la longueur de $(p/q)_Z$ ou nombre de positions de $(p/q)_Z$ est k notée $L((p/q)_Z) = k$ ou $L_Z(p/q) = k$. La dimension zokienne de $(p/q)_Z$ ou nombre d'étages de $(p/q)_Z$ est $k+1$ noté $D(p/q)_Z) = k+1$ ou $D_Z(p/q) = k+1$. La position $Z_i(x)$ est l'étage $i+1$.

Disposition pratique Exemple : $(987/1\,000)_Z$

étage	produit	reste	diviseur	quotient
n	nr_{n-1}	r_{n-1}		
		987	1 000	0
1	987	987		1
2	1 974	974		2
3	2 922	922		3
4	3 688	688		3
5	3 440	440		2
6	2 640	640		4
7	4 480	480		3
8	3 840	840		7
9	7 560	560		5
10	5 600	600		6
11	6 600	600		7
12	7 200	200		7
13	2 600	600		2
14	8 400	400		8
15	6 000	0		6

Commentaire Le lecteur notera l'analogie entre la division euclidienne et la division zokienne. Les deux algorithmes sont identiques. Il n'y a que le fait que la numération décimale est à base finie fixe 10 alors que la numération de Zoki est à base finie variable, base qui est n à l'étage n.

Théorème. — ***L'écriture en numération de Zoki d'une fraction inférieure à 1 est indépendante de son expression*** $(p/q, np/nq, ...)$ ***et a toujours une longueur finie.***

Démonstration : Si $kr_{k-2} = u_{k-1}q + r_{k-1}$ alors on a $k(nr_{k-2}) = (nu_{k-1})q + (nr_{k-1})$. De plus si l'algorithme de division ne s'arrête pas avant, il est obligé de s'arrête à l'étage q. □

Commentaire

- La numération de Zokpé Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ est une numération de position dans laquelle toute fraction a une écriture de longueur finie ;
- la numération de Zokpé Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ est une numération de position dans laquelle tout rationnel a une écriture finie ;
- la numération de Zokpé Zoki sur $\mathbf{Q}$ est une numération de position dans laquelle tout rationnel a une écriture de longueur finie ;
- l'introduction en tant que nombres, à la d'alembertienne, des écritures indéfinies est une fausse analogie due à l'imperfection des systèmes de numération à base fixe. 1/3 est un nombre en tant que rapport de deux grandeurs mais rapport au sens où la division est effectivement faite. L'écriture indéfinie $0,333\,333$ ... montre au contraire l'impossibilité de faire la division si l'unité est considérée arbritrairement prédivisée en 10 parts. La numération de Zoki, elle, préconise une prédivision variable de l'unité pour chaque partage spécifié permettant ainsi de réaliser effectivement chaque division.

Opérations de calculs en numération de Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1[$

Dans la donnée de tous les algorithmes, on suppose les conditions réunies de stabilité interne dans $\mathbf{Q} \cap]0,1[$ des opérations et des résultats des opérations.

Addition et soustraction en numération Zoki Les algorithmes d'addition et de soustraction en numération Zoki sont les mémes que ceux d'addition et de soustraction normales en base fixe. Seules les retenues doivent tenir compte du phénomène de variabilité des bases suivant la position ou plus précisément de l'étage :

$$\begin{array}{cccccccc} & 0, & a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n \\ + & & & & & & & \\ & 0, & b_1 & \cdots & b_k & 0 & \cdots & 0 \\ & 0, & (a_1+b_1) & \cdots & (a_k+b_k) & a_{k+1} & \cdots & a_n \end{array}$$

puis l'on fera les retenues de la manière suivante : si $a_i + b_i \geqslant i+1$ alors on écrira $c_i = a_i + b_i - (i+1)$ avec une retenue de 1... ainsi de suite comme dans l'algorithme classique. L'algorithme de soustraction est analogue.

Multiplication par un nombre entier n On multiplie chaque coefficient de chaque étage par n. Puis on fait un report comme suit : si $na_i \geqslant i+1$ alors on $na_i = t(i+1) + r$ avec $r < i+1$. On écrit alors $c_i = r$ avec une retenue de t.

Multiplcation en numération de Zoki La multiplication des écritures zokiennes en numérations de Zoki est fort malaisée. Elle existe mais est assez lourde. Elle est calquée sur le principe de mulitplication des polynômes en tenant compte de la remarque suivante : si m et n sont des entiers tels que $m \leqslant n$, on peut construire au un moins un entier k tel que $(1/m!)(1/n!) = a_k/(n+k)!$ soit $((n+1)(n+2)\cdots(n+k)/m!)(1/(n+k)!)$. S'arrêter au permier k tel que $((n+1)(n+2)\cdots(n+k)/m!)$. Il faut donc introduire des tables usuelles et partielles

de ce type de produits. Seulement après il faut passer à une longue série de reports. Pour ces opérations il vaut mieux convertir en une numération à base fixe, opérer puis convertir de nouveau. Pour la division il est plus simple de faire la division zokienne d'entiers.

Numération de Zoki et numération mixte de Zoki sur Q

Le lecteur définira les opérations de calculs sur les écritures zokiennes dans l'une ou l'autre de ces numérations. On n'oubliera pas la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour les opérations de multiplication et de division, l'on préférera la sommation de duplications ou plus généralement la sommation de polyplications (multiplication par un nombre entier plus grand que 2).

Numération des Pharaons

Quand on lit l'histoire de l'humanité et l'histoire des mathématiques on se rend compte que bien souvent cett histoire a été écrite à travers un prisme déformant de recherche d'antériorité et de supériorité. Ce prisme de différentiation des cultures sumériennes (*su (a)ma*) et égyptiennes (*(a) ka mi*), prisme d'évaluation relative de l'intelligence d'un système de numération dit de position sur l'autre dit de juxtaposition, oublie que si les uns avaient exotériquement des signes différents, les autre des clous de taille différente, et que dans une même catégorie de signes ou de clous de même taille *su ma* et *ka mi* ne faisaient que de la justaposition[2]. Le prisme de différentiation et de supériorité de culture qui attribue l'intelligence de l'invention du signe 0 à l'illustre hindou anonyme oublie les deux faits suivants :

- une numération de juxtaposition n'a aucune nécessité d'un symbole 0 : l'abscence n'étant plus à constater ;
- quand la culture babylonnienne, prolognegemnt de l'akkadéenne et, de plus loin, de la sumérienne, en viendra trois ou quatre siècles BC (avant *YHE(VHE) SU*) a une même taille des clous, elle créera, à la longue, un symbole de 0 nécessite une numération de position. Et ceci fort longtemps avant notre célèbre hindou inconnu.

Si je reprends la numération de *KA MI* ici, ce n'est pour aucun prisme que ce soit mais jsute pour le fait et l'analyse mathématique. Tout être sensé sait qu'il n'y a ni classe supérieure ni classe antérieure mais rien que des hommes avec leurs petites faiblesses et leurs grandes vanités.

Ne disposant pas de matériel permettant d'illustrer dans cet article la numération des Ka Mê Wo (Kamiou), je prierai le lecteur de consulter, entre autres, « Mathématiques et Mathématiciens » de P. Dedron et J. Itard ou « Une histoire des mathématiques » de A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. Il notera que les égyptiens avaient un ordre d'apparition de positionnement de chaque catégories de signes. Cet ordre dépendait du développement vers la gauche, la droite ou le bas. Qu'ainsi on avait d'abord le groupe des unités ne dépassant jamais 9, puis le groupe des dizaines ne dépassant jamais 9, puis le groupe des centaines ne dépassant jamais 9, ..., puis le groupe des cent mille ne dépassant jamais 9. Ce qui a fait écrire à Caratini que les égyptiens ne savaient pas compter au delà d'un million sans se rendre compte qu'un manuel scolaire actuel d'un élève de collège comprend des nombres loin, si loin des notations de Knuth, de Graham. Alors juxtaposition ou position ? Le lecteur notera que l'écriture des nombres fractionnaires plus petits que 1 obéissait à l'ordre décroissant d'apparition $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ Ainsi le *Ka Mê Ho To Le Ho Me* (Rot-en le Rome), le *Ka Mê Ne Hên Si* et je pense le *Ka Mê* puis le *Na Mê* (name(ou)) de *Su Ma*, auraient tous noté le nombre 12,95= « 1 signe de dizaine » « 2 signes d'unités » « le signed 1/2 » « le signe 1/4 » « le signe 1/5 » ou en langage moderne $12\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ comme le leur avait enseigné *To Tse Hê Mé*(Thoth-Hermes). Alors juxtaposition ou position ? Disons position différentiée pour le peuple ou juxtaposition de base 10 pour les entiers naturels et juxtaposition de base 2 pour les fractions inférieures à l'unité. Quant à moi je pense que les Égyptiens avaient exotériquement une 2-échelle d'écriture pour les éléments de $\mathbf{Q}_+$: numération décimale pour $\mathbf{N}$ et numération bianaire pour $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ définie par $(\{0,1\}, +, \cdot, \leqslant)$, $B = \{b_n = 1/n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$. Bien plus le nom même de *Ahêmê wozé*(Ahmosi dit Ahmès) qui avoue lui même recopier un papyrus de douzième dynastie lequel recopiait peut-être l'enseignement de *To Tse Hê Mé*(Thoth), le fait que le calculateur égyptien était sûr de pouvoir exprimer tout nombre dans sa numération, le fait de certaines décompositions faites dans le payrus de Rhind ou de Moscou, le fait que cette table de décomposition s'arrête à 101 et non 99, oui toutes ces choses m'ont amenés à croire que les prêtres égyptiens détenaient éxotériquement des numérations proches de la numérations de Zoki, notamment la numération mixte de Zoki.

2. je sais bien qu'en hiératique et en démotique les répétitions sont remplacées par des conventions d'écriture: des symboles de nombres ou de chiffres

Les numérations d'Ahmès(Papyrus de RHIND)

Je n'ai pas eu de traduction complète de ce papyrus ; mais des fragments dans les deux livres déjà cités et quelques autres fragments dans « Les étapes de la philosophie mathémaiques » L. BRUNSCHVICG et « Civilisation ou Barbarie » Cheik Anta DIOP. Malgré la rareté des exemples que j'ai eus, je reste persuadé que ceux qui ont composé cette table de décomposition connaissaient la numération de Zoki ou du moins une numération utilisant les produits factoriels, mais qu'ils ont choisi de divulguer au bon peuple celle plus simple d'Ahmès qui en découle et qui témoigne néanmoins de leur connaissance du binaire et du décimal.

1re voie : Soit à décomposer $2/n$, n impair. Prendre k le multiple de factoriel le plus inférieurement proche de n. Considérer $1/k$; faire $(1/k)/(1/n)$ soit n/k en numération zokienne. L'écriture de Zoki ainsi obtenue permet d'exprimer rapidement $1/k = 1/n(1 + 1/k_1 + 1/k_2 + \cdot + 1/k_i)$. Considérer maintenant $2-(1+1/k_1+1/k_2+\cdots+1/k_i)$, prendre $1/t_1$ le 0plus proche (pour trouver $1/t_1$ on peut juste considérer les inverses des factoriels $1/2$, $1/6$, $1/24$,... puis en cas $a/2, a/6, a/24$, ... où a divise le factoriel). Reconsidérer maintenant

$$2 - ((1 + 1/k_1 + 1/k_2 + \cdots + 1/k_i) + 1/t_1).$$

Refaire les mêmes dernières opérations jusqu'à avoir

$$2 = \sum_1^i \frac{1}{k_x} + \sum_1^j \frac{1}{t_y}$$

et alors $2/n = 1/k + \sum_1^j 1/nt_y$.

Exemple. — Soit à décomposer $2/13$. On a

$$2 \times 6 \leqslant 13 \leqslant 24$$

donc $2/13 = 1/12 + \cdots$. Soit $1/12 : 1/13$ soit $(13/12)_z = 1, 0.0.2$ donc

$$1/12 = (1/13)(1 + 2/24) = (1/13)(1 + 1/12).$$

Soit $2 - (1 + 1/12) = 11/12$, soit

$$2 - ((1 + 1/12) + 1/2) = 5/12 = 3/12 + 2/12$$

donc $2 - ((1 + 1/12) + (1/2 + 1/4 + 1/6)) = 0$ d'où

$$\begin{aligned} 2/13 &= 1/12 + 1/2 \times 13 + 1/4 \times 13 \\ &= 1/12 + 1/26 + 1/52 + 1/78. \end{aligned}$$

Deuxième voie. Soit à décomposer $2/n$ avec n impair. Faire d'entrée la division zokienne de 2 par n. S'arrêter au premier symbole a non nul, on a donc $2/n = a/b! + \cdots$. Simplifier $a/b!$. On obtient ainsi $1/k$ et on continue ainsi $1/k$ et on continue le processus comme précédemment. Puis, quand on a

$$1/k = 1/n(1 + 1/k_1 + \cdots + 1/k_i),$$

considérer

$$2 - (1 + 1/k_1 + \cdots + 1/k_i) = p/q$$

et que si la dimension zokienne de $(p/q)_z$ n'est pas trop élevée on obtient ainsi rapidement

$$(1/t_1 + \cdots + 1/t_j),$$

sinon, on continue comme plus haut.

Exemple. — Soit à décomposer $2/13$.

$$(2/13)_z = 0, 0.0.3 \ldots,$$

on a $2/13 = 1/8 + \cdots$, or $1/8 : 1/13$ ou

$$(13/8)_z = 1/13(1 + 1/2 + 1/8).$$

Soit $2 - (1 + 1/2 + 1/8) = 3/8$ d'où, par décomposition au choix $2 = (1 + 1/2 + 1/8) + (1/4 + 1/8)$ donc $2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$ ou alors, par division zokienne, $2 = (1 + 1/2 + 1/8) + (1/3 + 1/24)$, donc

$$2/13 = 1/8 + 1/39 + 1/312.$$

Troisième voie. Soit à décomposer $2/n$, où n est impair. Prendre $1/k$ au choix, proche de $2/n$. Ce choix peut être guidé par des considérations comme la facilité des opérations de duplication par 2, par 5, par 10, par 12, par 60 ou par des considérations de simplification de dénominateur trop lourd par les deux voies précédentes. Une fois ce choix effectué, on procède comme dans l'une des deux voies précédentes.

Exemple. — Soit à décomposer $2/13$. Choisissons $1/7$. On a alors $(1/13)_z = 1, 1.2.0.2.5.1$ et finalement, d'après la suite de procédés précédente, on trouve $2/13 = 1/7 + 1/91$.

L'arithmétique d'Ahmès (papyrus de Rhind)

Je ne peux quitter Ahêmê wo zé sans essayer d'expliquer ses pratiques algébriques. Loin de procéder par tâtonnements, celui-ci applique les notions de suite arithmétique, géométrique et dans ses problèmes du premier degré, tout comme dans certains problèmes du second degré spécialement conçus pour être ramenés à des problèmes du premier degré, Ahmès utilise la propriété de la linéarité et de la règle de trois comme suit : si $aX_1 = b_1$ et $aX_2 = b_2$, alors $X_1/X_2 = b_1/b_2$ d'où $X_1 = (X_2)(b_1/b_2)$, donc quand Ahmès a un problème comme ceux des numéros 24 à 29, du premier degré de type $aX = b$, il prend $X_2 = 1$, etc., et il applique sa règle de trois. Et de même les soi-disant « tâtonnements » d'Ahmès ne sont que des exposés de différentes méthodes. Le peuple n'avait qu'à savoir utiliser, il n'avait pas besoin de comprendre. Donc, pas besoin de théories, mais seulement des algorithmes.

Nombres premiers

Définition. — *Un nombre entier n est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.*

Le lecteur qui veut avoir, par curiosité, une connaissance élémentaire de ce qui a été fait avant ces vingt dernières années sur le sujet, peut consulter, *Les nombres premiers*, de J. Itard. Rappelons simplement le résultat suivant.

Théorème (Wilson). — ***Un entier n est premier si et seulement si $n \mid (n-1)! + 1$. En particulier, pour un entier non nul p premier, on obtient $(p-1)! = -1$ (p).***

On doit aussi mentionner le fait qu'en 1974, James P. Jones a donné un polynôme à coefficients entiers à 26 indéterminées dont l'ensemble des valeurs positives est exactement l'ensemble des nombres premiers.

Considérons $\mathbf{Q} \cap]0, 1]$ muni de la numération de Zopké Zoki.

Proposition. — *Si un nombre entier $n > 4$ n'est pas premier, alors il existe un entier $k < n$ tel que n divise $k!$.*

Démonstration : Si n possède plusieurs facteurs premiers, on peut écrire $n = n_1^{e_1} \dots n_t^{e_t}$ et il suffit de prendre $k = \max\{n_1^{e_1}, \dots, n_t^{e_t}\}$.

Si par contre n est une puissance d'un nombre premier, $n = a^e$, on peut prendre $k = ea$. □

Proposition. — *Si un nombre entier $n > 4$ n'est pas premier, alors la dimension zokienne de son inverse $1/n$ est inférieure à n.*

Démonstration : La proposition précédente et la définition de la division de Zoki font que pour le premier entier k tel que n divise k, la division s'arrête. □

Proposition. — *Si un entier n est premier, alors la dimension zokienne de son inverse est exactement n.*

Démonstration : Arrivé à l'étage n, le résultat de l'opération est multiple de n et donc la division s'arrête.

Supposons que la division s'arrête à l'étage $i < n$, alors, nous aurons

$$\frac{1}{n} = \frac{k_2}{2!} + \frac{k_3}{3!} + \dots + \frac{k_i}{i!} = \frac{a}{i!}$$

pour un entier a, soit $na = i!$, ce qui est impossible. □

Théorème. — ***Excepté le nombre 4, un entier n est premier si et seulement si la dimension zokienne de son inverse est n,* i.e.,** $D_z(1/n) = n$.

Démonstration : Cela résulte des deux propositions précédentes. □

Conséquences. pour savoir si un nombre entier n est premier, il suffit d'écrire son inverse en numération de Zoki. C'est la forme de l'écriture zokienne de $1/n$ qui nous renseigne, ou plus précisément sa dimension.

Pratiquement, un algorithme de division zokienne de dimension au plus n suffit à déterminer si n est premier ou non. Il faut au plus $3n$ opérations de multiplication et soustractions, et à aucun stade la valeur d'aucun terme ne dépasse n^2.

Définition. — *Soit $p/q < 1$ et $D_z(p/q) = k$. On appelle zokien de p/q et on note* $\mathrm{Zok}(p/q)$ *la valeur du nombre-chiffre de la position $k-1$, soit $Z_{k-1}(p/q)$. C'est la valeur du nombre-chiffre de l'étage k.*

Proposition. — *Si me nombre entier n est premier, alors le zokien de son inverse $1/n$ est $n-1$,* i.e., $\mathrm{Zok}(1/n) = n - 1$.

Démonstration : On a $1/n = (n-1)!/n!$ or $(1/n!)_z = 0,0.0 \dots 0.1$ avec $D_z(1/n!) = n$ donc $((n-1)!/n!)_z = 0,0.\dots.0.(n-1)!$. D'où $\mathrm{Zok}(1/n) = (n-1)! \mod n$ et d'après le théorème de Wilson, $\mathrm{Zok}(1/n) = -1 \mod n$. Mais comme $\mathrm{Zok}(1/n)$ est élément de l'ensemble des symboles permis à l'étage n, il est strictement inférieur à n et donc $\mathrm{Zok}(1/n) = n - 1$. □

On peut aussi montrer que $Z_{n-2}(1/n) = 0$.

Corollaire. — *Un entier n est premier si et seulement si le zokien de son inverse est égal à $n-1$.*

Proposition. — *Soit $p/q < 1$ et $q \neq 4$. Alors, $D_z(p/q) = q$ si et seulement si q est premier.*

Proposition. — *Si n est premier, alors $D_z(1/n^t) = tn$ pour tout entier t non nul.*

Proposition. — *Si m et n sont premiers, alors $D_z(1/(m^u n^v)) = \max(um, vn)$.*

Proposition. — *Soient q et n deux entiers distincts. Si pour un entier t donné, q^t divise n, alors $q^t \leqslant n/2$.*

Corollaire. — *Un entier n est premier dès que $D_z(1/n) > n/2$.*

Proposition. — *Si un entier impair n n'est pas premier, alors $D_z(1/n) \leqslant n/3$.*

Corollaire. — *Un entier n est premier dès que $D_z(1/n) > n/3$.*

Proposition. — *Soit n un entier qui n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre premier donné q. Soient s et t des entiers. Si s^t divise n, alors $s^t \leqslant n/q$.*

Corollaire. — *Soit n un entier qui n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre premier donné q. Alors, n est premier dès que $D_z(1/n) > n/q$.*

Théorème. — ***Soit n un nombre entier. Le zokien $D_z(1/n)$ est le plus petit entier k tel que n divise $k!$. De plus k admet un diviseur premier qui divise n.***

Démonstration : Posons $t = D_z(1/n)$. On a, par calcul des restes de la division de Zoki,

$$t! - n\sum_{i=2}^{t} u_i \prod_{j=i+1}^{t} j = 0,$$

donc n divise $t!$. Soit maintenant $t' < t$ tel que n divise $t'!$. L'algorithme de la division de Zoki donne

$$t'! - n\sum_{i=2}^{t'} u_i \prod_{j=i+1}^{t} j = r_{t'} \neq 0,$$

Comme n divise t', il divise le reste non nul $r_{t'} < t'$. Contradiction. □

Si n divise $k!$, c'est que tous les facteurs de la décomposition de n apparaissent dans $k!$ et qu'il en manquait au moins un dans la décomposition de k, comme k est le premier entier vérifiant ceci. Donc $k = D_z(1/n)$ et k et n sont commensurables, c'est-à-dire possèdent un diviseur commun différent de 1.

Commentaire. Un nombre non premier étant donné, par un jeu d'écritures zokiennes, en cascade, de l'inverse de ce nombre, de l'inverse de la dimension de son inverse, de l'inverse de la dimension de l'inverse de la dimension de ce nombre, etc., on aboutit à pouvoir décomposer ce nombre en produit de facteurs.

Théorème. — ***Soit n un nombre entier. L'avant dernier reste de la division zokienne de 1 par n multiplié par la dimension de l'inverse de n est un multiple de n.***

Démonstration : Cet avant-dernier reste, multiplié par la dimension de $1/n$, est divisible par n, car les opérations de la division zokienne s'arrêtent. □

Constatation. Quand on a $D_z(1/n)$ et cet avant-dernier reste, on décompose plus facilement n en produit de facteurs. En effet, soit $D_z(1/n) = k$ et $r_{k-1} = t$. Diviser kt par n. Soit $q = kt/n$. Soit $k't'$ la simplification de kt par les facteurs de q. On a $n = k't'$.

Constatation. Si $D_z(1/n)$ est un nombre premier alors il divise n ou si l'avant-dernier reste est un nombre premier r, alors il divise n

Théorème. — ***Soit*** n ***un nombre premier et*** m ***un nombre entier supérieur à*** n***. Le nombre*** m ***est premier si et seulement si***

$$D_z\left(\frac{m-n}{mn}\right) = m \textbf{ et } \mathrm{Zok}\left(\frac{m-n}{mn}\right) = 1.$$

Démonstration : Soient n et m des nombres premiers. La première factorielle que divise nm donc $D_z(1/nm) = m$. De plus, on a $n(1/nm) = 1/m$, donc si $t = \mathrm{Zok}(1/nm)$, on a $nt \equiv m-1 \ (m)$; or

$$\begin{aligned}\mathrm{Zok}\left(\frac{m-n}{mn}\right) &\equiv (m-n)t \quad (m)\\ &\equiv -nt \quad (m)\\ &\equiv 1-m \quad (m)\\ &\equiv 1 \quad (m).\end{aligned}$$

Comme ce zokien est strictement inférieur à m, il est bien égal à 1.

Si n est premier, pour tout $m > n$, l'égalité

$$D_z\left(\frac{m-n}{mn}\right) = m$$

n'est possible qui si m est premier ; nm divise $m!$ et on peut conclure. □

Conclusion

J'ai limité dans cet article l'étude des nombres à la numération de Zoki. J'ai terminé le paragraphe sur les nombres premiers par ce théorème que je trouve intéressant pour permettre de donner la distribution des nombres premiers et surtout pour permettre de connaître le nombre premier successeur d'un autre. Je n'ai pas étudié les propriétés des nombres dans les numérations de Zoki d'ordre n. Ainsi, par exemple, en numération d'ordre 2, le nombre 4, non premier, ne se trouve plus être une exception vis-à-vis de la dimension zokienne de l'inverse. Le zokien de l'inverse des carrés des nombres premiers est souvent 1. Le zokien de l'inverse d'un nombre premier est ce nombre. Et il y a autant d'autre propriétés aux ordres 3, 4, 5, etc.. Si je ne me presse pas tant quant à l'étude des nombres, c'est parce que pour moi, essentiellement, j'ai construit les numérations de Zopké Zoki pour montrer qu'une numération de position de l'ensemble des nombres rationnels n'a pas forcément des écritures indéfinies, si l'on veut, infinies (les fractions continues ne sont pas une numération de position : l'écriture finie des nombres rationnels sous forme de fraction continue découle du fait que tout entier est multiple de un). L'homme peut ainsi voir que l'introduction d'écritures infinies, dues alors aux irrationnels, est un acte de choix qui n'a pas d'analogue dans sa pensée. Devant le peu de consistance de quelque métaphysique que ce soit des mathématiques de l'infini actuel, d'Alembert avait beau jeu, par analogie au cas des fractions représentées dans une numération base fixe 10 entre autres, de justifier les pratiques newtonniennes par la notion de limite. En effet, les écritures indéfinies périodiques décimales représentent, mais si mal et par défaut du système de numération, les fractions : nombres dont les suites croissantes des troncatures se rapprochent indéfiniment. Ainsi, par exemple, de l'erreur d'égalité

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333\ldots$$

l'esprit humain a donc très vite glissé à $\sqrt{2}$, π et e, conçus comme limites de suites croissantes des troncatures de développements infinis non périodiques. Et l'homme affirme que ces processus sans fin désignent des nombres, par analogie aux cas fractionnaires comme $1/999$, sans faire attention qu'il effectue un passage à la limite tacite mais non reconnu. Car pour se donner bonne conscience, l'homme se réfugie derrière des axiomes qu'il se donne de la théorie des ensembles ou de la théorie des nombres et derrière la convention découlant d'un de ces axiomes, à savoir

$$1 = 0,999999999\ldots$$

alors qu'en réalité, cette convention vient de l'égalité erronée

$$\frac{1}{3} = 0,333333333\ldots$$

Les axiomes en question sont : l'axiome de l'infini de Tarski, l'axiome du choix, l'axiome d'induction de Péano et l'axiome des segments emboîtés de Cantor. Quand on veut bien les analyser, ces axiomes achèvent l'inachevé ou si l'on veut l'inachevable. Et ce que par euphémisme le mathématicien appelle éléments idéaux, ce sont des (pseudo) éléments contradictoires car ils sont engendrés par la contradiction de l'achèvement de l'inachevable. Ainsi, l'ensemble des

entiers, $\mathbf{N}$, est l'achèvement non accepté des sections initiales $[0, n[$, l'entier n croissant indéfiniment, tout comme l'ensemble vide, $\varnothing$, est l'achèvement, officiellement accepté, lui, des sections finales $[n, \rightarrow[$. Tenez, que le lecteur, s'il veut bien, et moi, jouions à un petit jeu. Qu'il prenne cette calebasse vide, qu'il essaye de la remplir par les nombres entiers, au fur et à mesure, selon l'ordre de $\mathbf{N}$. Il lui est interdit, en raison de la métamathématique (Hilbert) et la pratique mathématique de parler d'un virtuel acte final de ramassage de tous les entiers et ceci, malgré l'axiome de Péano, car sa calebasse se remplit au fur et à mesure et n'est donc pas une calebasse (ou regroupement) déjà constituée qui vérifie : si l'entier n appartient à la calebasse, alors son successeur aussi (justification qui laisse à désirer, bien sûr, mais servie par la pratique mathématique). Mais qu'à cela ne tienne. Qu'il vide entièrement sa calebasse. Je prends, moi aussi, une calebasse $\mathbf{N}$ mais déjà remplie de tous les entiers. Qu'il se contente juste de ramasser dans sa calebasse les entiers que j'expulse un à un de la mienne, dans l'ordre de $\mathbf{N}$. La pratique mathématique me permet, moi, d'expulser tous les entiers (comment ? mystère et boule de gomme), mais elle me le permet puisque ma calebasse peut être vidée. Prétendre à un vide obtenu par une expulsion dernière d'une infinité d'entiers c'est nier l'indéfini et de là, l'infinité même. Prétendre aussi, contrairement à la mathématique, à l'impossibilité d'une calebasse vidée, c'est nier tout infini actuel et surtout tout concept basé sur l'infini. Donc il m'est permis de vider ma calebasse que je vidais un à un même si je n'ai pas un dernier entier vidé, mais le lecteur a-t-il pu achever son remplissage quand ma calebasse s'est trouvée vidée ? Oui, a-t-il pu *achever* son ramassage ?

Non, non et non, l'infini actuel est contradictoire. L'infini actuel sort de la logique humaine tout court et non seulement du tiers exclus. Certes la logique du tiers exclus ne convient pas aux calebasses infinies mais aucune autre logique d'essence humaine non plus. En réalité, l'homme n'a pas besoin de suite infinie d'actes : je viens de le démontrer en ce qui concerne l'écriture, en numération de position, des nombres irrationnels. L'infini n'est introduit que parce que, à une époque, il fallait produire en attendant que la foi vienne. Mais c'est bien de foi dont il s'agit et non de raison. Le « C'est vrai parce que ça marche » ne peut sortir que de la bouche de celui qui ne réalise pas à sa juste mesure l'incomplète adéquation du réel, je veux dire l'existence des pathologies, des paradoxes, des fictions utiles, des éléments idéaux, bref, toutes chose qui ne peuvent participer du réel. L'efficacité, de plus partielle, de résultats n'est pas gage de validité de raisonnement car être mathématicien, c'est être essentiellement déductif et confiant juste en la déduction, mais être mathématicien, ce n'est pas non plus être métaphysicien, c'est-à-dire hors de toute adéquation ou de toute application. Le « C'est vrai parce que ça marche » ne peut sortir que de la bouche de l'empiriste qui cnnait les problèmes mais ne peut pas les résoudre. L'homme, le mathématicien, peut et doit refaire toute la Mathématique sans l'infini actuel, j'en atteste. Et ce sont sur ces mots de confiance en la finitude et l'exactitude de toutes les opérations humaines que j'achève cet article, tout en rappelant : la Mathématique est une science qui a besoin d'une métaphysique (sous-jacente) cohérence, non contradictoire et non hypothético-déductive lui garantissant la certitude de la consistance de ses principes premiers (axiomes) et de l'existence de ses éléments premiers. Faute de cela, elle n'est, du moins pour sa part utile et pratique, qu'empirisme déguisé, science relative, science de recettes qui marchent habillée d'un vernis de déduction.

Livres

Theory of Holors, a Generalization of Tensors,
P. Moon and D.E. Spencer,
Cambridge University Press, 1986

Les livres d'algèbre anglo-saxons, les physiciens et les mathématiciens d'il y a longtemps présentent les matrices et toute l'algèbre linéaire au travers de manipulations de tableaux de nombres — notion fort peu géométrique mais qui se prête admirablement bien aux calculs. Les généralisations de l'algèbre linéaire, par exemple les tenseurs, les formes différentielles ou les connexions, sont intrinsèquement géométriques, mais certains persistent à ne voir que des tableaux de nombres, ou plus précisément des fonctions qui à un système local de coordonnées au voisinage d'un point associent un tableau de nombres. Et moi qui ai horreur de tout ce qui est numérique...

Une question se pose alors : peut-on comprendre ce qu'écrit une telle personne sans devoir réécrire soi-même l'article que l'on tente de lire? Eh bien oui. Il suffit de donner un autre sens à tous ces symboles « indiceux » (comme épineux, mais avec des indices à la place des épines) un sens géométrique.

Ainsi, x^i est un vecteur (et pas sa composante : l'indice est muet), x_i est un covecteur (une forme différentielle d'ordre 1), x_{ijk} pourrait être une forme différentielle d'ordre 3 (la position et le nombre des indices nous disent que c'est un tenseur de type $(3,0)$, mais ne nous renseignent pas sur son éventuel caractère antisymétrique). Pour le manipulateur de tableaux, x^i désigne une composante d'un vecteur, dans une base donnée, pour nous, c'est le vecteur tout entier, qui n'a rien à voir avec une base qui serait de toute manière arbitraire — nous parlons toujours des langages différents, mais nous utilisons désormais les même mots.

Nous pouvons maintenant combiner nos différents tenseurs : si g_{ij} est le produit scalaire sur une variété riemannienne, $g_{ij}x^iy^j$ est ce (champ de) tenseur(s) appliqué aux (champs de) vecteurs x^i et y^j, c'est simplement le produit scalaire que l'on pourrait noter $g(x,y) = \langle x, y\rangle$. Si l'on manipule des tableaux de nombres, c'est beaucoup plus difficile, la formule précédente s'écrit $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}x^ix^j$: on prend un tableau de n^2 nombres, deux tableaux de n nombres et on les multiplie et on les ajoute comme dans la formule.

La dualité entre un espace vectoriel et son dual est un autre exemple de produit contracté : $x_i = g_{ij}x^j$. Les histoires de spineurs et de matrices γ relèvent aussi de ce formalisme.

J'allais oublier quelque-chose : tout n'est pas si simple pour notre manipulateur de tableaux. Un tenseur est la donnée, pour chaque système de coordonnées, d'un tableau de nombres qui se transforme d'une certaine manière quand on change de coordonnées : il faut considérer tous les systèmes de coordonnées en même temps et les passages de l'un à l'autre. Ainsi, si v est un vecteur,

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$$

et si α est un covecteur,

$$\alpha_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \alpha_i$$

Pour vous faire peur, voici la formule pour une connexion :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^{i'}_{j'k'} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Le livre cité plus haut énumère toutes ces règles de calcul dans un unique formalisme : ce ne sont plus des vecteurs, des tenseurs, des formes différentielles, des connexions, mais simplement des *holeurs*. Ainsi la « géométrie » est accessible à tous ceux qui ne veulent pas en entendre parler, qui ne veulent rien d'autre que des calculs, des pages et des pages de calculs... **V.Z.**

Galois' Dream, M. Kuga, Birkhäuser, 1993

Comme vous l'avez deviné d'après le titre, ce livre traite d'équations différentielles fuchsiennes et de leur groupe de monodromie (en gros, un cas particulier très simple de la théorie de Picard–Vessiot, *i.e.*, la théorie de Galois des équations différentielles), à un niveau *élémentaire* (licence), en soulignant l'interactions entre divers domaines des mathématiques : la théorie des groupes, la topologie et l'analyse. La propension qu'ont les auteurs japonais à truffer leurs textes de formules rends toutefois la dernière partie du livre indigeste. Plutôt que de détailler plus avant son contenu et son esprit, je préfère en citer un extrait. Les nombreuses illustrations sont de la même verve.

« When I was a schoolboy, I was seized by the idea that everyone has an invisible tail at his back. The tail is very light, a million miles long, and trails behind us as we walk, from birth to death. The tail extends far away, beyond our world, and originates

in the Land of the Dead. When we walk, the tail is reeled out from its source. When we have pulled out the entire tail, we die.

The strategy for a long life, therefore, is to try to avoid pulling out our tail. In order to do this, walk null-homotopic paths as much as possible. When you return, follow the same route. Never go through a tunnel. (My ideal world was a universal covering of the real world—if there is such a thing.) My idea completely obsessed me; I was trapped in my own fantasy. I even came to loathe people who crossed my path behind me. » **V.Z**

Lectures on Seiberg–Witten Invariants, J.D. Moore, Springer Verlag, 1996

La théorie de Donaldson permet de démontrer (pas de manière très simple) que les variétés continues compactes de dimension quatre peuvent ne pas avoir de structure différentielle ou au contraire, en avoir plusieurs. Les invariants de Seiberg–Witten arrivent au même résultat par un chemin plus aisé.

Un invariant est une quantité (par exemple, un nombre, un élément d'un espace vectoriel, un groupe) associée à une variété différentielle de manière que deux variétés isomorphes aient le même invariant. Pour démontrer que deux variétés différentielles sont distonctes, il suffit de trouver un invariant qui prenne une valeur différente sur ces deux variétés. Vous connaissez déjà des invariants (groupe fondamental, cohomologie), mais ce sont des invariants *topologiques* : il ne dépendent que de l'espace topologique sous-jacent, et pas de la structure différentielle.

Pour obtenir un invariant différentiel, on peut essayer de procéder ainsi : d'abord, définir un opérateur différentiel sur notre variété, (c'est-à-dire une EDP, pour ceux qui préfèrent ce vocable) qui dépende de la structure différentielle : penser, par exemple, au laplacien sur une variété riemannienne. Puis, si les solutions forment un espace vectoriel de dimension finie, cette dimension forme un invariant. C'est à peu près l'idée de base, si on laisse de côté les difficultés techniques (il faut travailler pour obtenir un opérateur différentiel qui donne un invariant qui ne soit pas topologique et, comme il n'est pas linéaire, l'espace des solutions ne forme pas un espace vectoriel).

L'outil essentiel pour définir les équations de Seiberg–Witten est la géométrie spinorielle. L'importance des formes différentielles n'est plus à démontrer : elles interviennent dans les formalismes de la physique, dans l'intégration sur les variétés, dans le calcul de la cohomologie. Tout ceci se passe sur une variété, sans aucune structure supplémentaire. Néanmoins, nos variétés sont souvent riemaniennes, *i.e.*, munies d'une métrique. Existe-t-il une notion qui garde toute la puissance et l'omniprésence des formes différentielles tout en tenant compte de cette structure supplémentaire ? Oui : on peut remplacer l'algèbre extérieure par l'algèbre de Clifford, qui véhicule plus d'information que l'algèbre extérieure et englobe les formes extérieures. C'est le point de départ de la géométrie spinorielle.

Le livre construit ensuite l'équation de Seiberg–Witten, l'espace de modules de ses solutions et l'invariant en question, que je ne détaille pas. Concluons en notant que d'autres applications concernent l'étude du lien entre la courbure et la topologie d'une variété riemannienne, ou l'existence de courbes pseudo-holomorphes dans certaines variétés simplectiques. **V.Z**