La numération de Zokpé Zoki

Ayaovi Zokpé Zoki d'Almeida

Introduction

L'infini actuel s'est glissé dans la pensée mathématique, entre autres, par la numération de position. La numération de position à base fixe, approximations indéfinies pour une division par un nombre non diviseur de la base, permettait de concevoir, pour certaines fractions, des écritures indéfinies c'est-àdire sans fin possible. Ceci ne révélait que l'imperfection théorique du système de numération bien que ces système soient du point de vue pratique plus intéressants pour les opérations usuelles surtout pour la multiplication ; mais ceci a amené l'homme à croire aux nombres irrationnels.

Il était normal qu'après mon mémoire « Réflexions sur l'infini », ou les deux articles qui récapitulent l'essentiel de ce mémoire, je recherche une numération de position dans laquelle tout nombre rationnel ait une écriture finie. Je disposais depuis quelques année de cette numération de Zokpé Zoki dont la seule vanité et prétention était de montrer qu'il existe une numération de position dans laquelle toute fraction a une écriture finie et que les numérations de position qui ont le défaut de générer des écritures infinies ne font que traduire une imperfection de leurs concepts, imperfection due à l'existence de nombres premiers et beacoup plus généralement, premiers entre eux c'est-à-dire « incommensurables » en termes d'entiers. L'ambition de ce travail en serait restée là si inopinément je ne découvrais ces derniers jours qu'il y a quatre à six mille ans, la numération connue de l'Égypte pharaonique était la partie esotérique d'une théorie ésotérique sans doute similaire à la numération de Zokpé Zoki. L'assurance des manipulations d'Ahmès, le refus de la numération de position pour les entiers, le refus de l;infini, l'emploi de la même technique pour la décomposition de $2/(n+1)$, l'emploi unique des sommations finies des inverses des exceptées justement les fractions 2/3, 3/4, 5/6, 23/24, ..., la préférence à la duplication, m'ont paru le fait de gens qui disposaient de la numération mixte de Zokpé Zoki ou échelle de travail où toute fraction a une mesure exacte ou système d'approximations toujours finitaires des rapports de nombres entiers.

Les idées mathématiques étant plus intéressantes quand elles peuvent faire autre chose que ce qui les a motivées, l'utilisation des écritures zokiennes des fractions en théorie des nombres se révèle positive. Elle nous permet de singulariser, *i.e.* caractériser les nombres premiers. En effet, en numération de Zokpé Zoki, les inverses des nombres premiers et seulement eux, excepté l'inverse de 4, ont une forme particulière qui les caractérise. Il suffit d'écrire l;inverse d'un nombre en numération de Zokpé Zoki pour savoir si ce nombre est premier. De plus la dimension de l'inverse de n et le nombre entier n lui-même sont « commensurables » ; ce qui permet la connaissance de la décomposition de tout nombre en produits de facteurs, par un jeu d'écritures zokiennes.

Systèmes de numérations

Structure numérable à une loi

Définition. — *On appelle ensemble numérable un quadruplet $(E, *, \cdot, \leqslant)$ tel que*

- *$(E, \leqslant)$ soit un ensemble totalement ordonné,*
- *$(E, *)$ soit un monoide régulier vérifiant :*

$$\forall a \in E, \forall b \in E, \quad b \leqslant a \Rightarrow \exists c \in E \quad a = b * c$$

  et que la loi $*$ soit compatible avec $\leqslant$,
- *$(E, \cdot)$ est un ensemble muni de loi externe sur une structure $(K, +, \cdot, \leqslant)$ double monoide régulier distributif bien ordonné et vérifiant :*

$$\forall n \in K, \forall m \in K, \forall a \in E, \quad n \leqslant m \Rightarrow na \leqslant ma$$

  et où l'on note $s(n)$ (resp. $p(n)$) le successeur (resp. prédécesseur) de n, K étant au plus dénombrable ; l'élément neutre de l'addition étant noté 0 et celui de la multiplication 1.

Définition. — *On appelle ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$ une structure telle que :*

1. *$(E, *, \cdot, \leqslant)$ soit un ensemble numérable,*
2. *B soit :*
   - *ou bien, une partie de E bien ordonnée vérifiant :*
     (a) *$\forall a \in E$, $\forall b \in B \mid b \leqslant a \leqslant s(b)$ où $s(b)$ est le successeur de b pour le bon ordre de B,*
     (b) *$\forall b \in B, \forall a \in E$, $b \leqslant a < s(b) \Rightarrow \exists n \in \mu(b) \subset K \mid a < b * nb$ où l'on définit l'ensemble des symboles permis à l'étage b par $\mu(b) = \{n \in K, nb < s(b)\}$,*

– *ou bien, une partie de E bien ordonnée par l'ordre inverse de E vérifiant :*
  (a) *$\forall a \in E, \forall b \in B,\ p(b) > a \geqslant b$, où $p(b)$ désigne le prédécesseur de b, s'il existe, dans le bon ordre de B,*
  (b) *$\forall b \in B, \forall a \in E,\ p(b) > b \geqslant b \Rightarrow \exists n \in \mu(b) \subset K \mid a < b * nb$ où l'ensemble des symboles permis à l'étage b est défini par $\mu(b) = \{n \in K,\ nb < p(b)\}$.*

On dit aussi que B est une échelle d'écriture montante (resp. descendante) pour les éléments de E par des symboles de K nommés chiffres ou nombres-chiffres suivant que K est numéré ou pas.

Exemple. — $E = \mathbf{N}$, $K = \mathbf{N}$, $B = \{8^n,\ n \in \mathbf{N}\}$, $\mu(8^n) = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Définition. — *On appelle écriture d'un élément x de E dans une numération montante, la suite d'éléments de K indexée par I avec I le cardinal de B, suite obtenue par le procédé de construction suivant : soit $B = (b_n)_{n\in I}$; soit $b_k \in B$ avec $b_k \leqslant x < b_{k+1}$; u_0 est le plus petit élément de $\mu(b_k)$ tel que $x \leqslant b_k * u_0 b_k$. Soit r_0 tel que $x = u_0 b_k * r_0$; si l'on a $r_0 < b_{k-1}$ alors $u_1 = 0$ sinon u_1 est le plus petit élément de $\mu(b_{k-1})$ tel que $r_0 \leqslant b_{k-1} * u_1 b_{k-1}$. Soit r_1 tel que $r_0 = u_1 b_{k-1} * r_1$. Si l'on a $r_1 < b_{k-2}$ alors $u_2 = 0$, et ainsi de suite.*

Définition. — *On appelle écriture d'un élément x de E dans une numération descendante, la suite d'éléments de K indexée par I avec I le cardinal de B, suite obtenue par le procédé de construction suivant : soit $B = (b_n)_{n\in I}$; soit $b_k \in B$ avec $b_k \leqslant x < b_{k-1}$; u_0 est le plus petit élément de $\mu(b_k)$ tel que $x \leqslant b_k * u_0 b_k$. Soit r_0 tel que $x = u_0 b_k * r_0$; si l'on a $r_0 < b_{k+1}$ alors $u_1 = 0$ sinon u_1 est le plus petit élément de $\mu(b_{k+1})$ tel que $r_0 \leqslant b_{k+1} * u_1 b_{k+1}$. Soit r_1 tel que $r_0 = u_1 b_{k+1} * r_1$. Si l'on a $r_1 < b_{k+2}$ alors $u_2 = 0$, ainsi de suite.*

Définition. — *Soit un ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$. Soit x un élément de E ; si l'écriture de x est telle qu'il existe un rang n à partir duquel la construction de la suite (u_n) s'arrête ou est stationnaire avec pour valeur 0 alors la longueur de l'écriture de x est n, sinon la longueur est le cardinal de B (souvent infini).*

Définition. — *Soit un ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$ sous-ensemble d'une structure $(F, *, \leqslant)$, tel qu'il existe un monomorphisme de $(C_F(E), *, \leqslant)$ dans $(E, *, \leqslant)$. On dit que F est numéré par convention d'écriture si l'on se donne un symbole $*^{-1}$ et l'on convient d'écrire tout élément x de F de la façon suivante : si x est élément de E alors l'écriture dans F de x est son écriture dans la numération $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$ précédée du symbole $*$. Si x n'est pas élément de E alors l'écriture dans F de x est celle de son image, par le monomorphisme, précédée du symbole $*^{-1}$.*

Type d'échelle d'écriture ou de numération

Soit un ensemble numéré $(E, *, \cdot, \leqslant, B)$. Soit $\mu : B \to P(K)$ l'application qui à tout élméent b de B associe $\mu(b)$ l'ensemble des symboles permis à l'étage b.

Définition. — *Si $\mu : B \to P(K)$ est une application constante alors on a une écriture à base fixe. On conviendra de nommer base l'élément $\inf C_K(\mu(b))$ si $\mu(b) \neq K$ et si $\mu(b) = K$ on a une échelle d'écriture à base totale.*

Si $\mu \to P(K)$ est une application non constante mais que pour tout b élément de B on a $\mu(b)$ qui est un ensemble fini alors on a une échelle d'écriture à base fluctuante ou variable. Et la base de l'étage b est l'élément $\inf C_K(\mu(b))$ si $\mu(b) \neq K$.

Si $\mu : B \to P(K)$ est une application monotone et que pour tout élément b de B, l'ensemble $\mu(b)$ est fini alors on a une échelle d'écriture à base variable monotone.

Définition. — *Si la longueur d'écritue de tout élément est finie alors l'échelle est dite finitaire.*

Structure numérable à n lois

Définition. — *Un ensemble n-numéré est une structure $(E, *, \leqslant)$ telle que :*

– *il existe une famille $(E_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ de sous-ensembles de E et pout tout i $(E_i, *, \cdot, \leqslant, B)$ soit un ensemble numéré,*
– *$\forall x \in E, \forall i \in \{0, ..., n-1\}$ $\exists x_i \in E_i$ avec $x = x_0 * ... * x_{n-1}$. L'éciture de l'élément x de E est l'alignement des chiffres des x_i séparées par des virgules et dans l'ordre,*

Définition. — *Si pour tout i on a un même type d'échelle d'écriture « α » alors la structure numérée $(E, *_0, ..., *_{n-1})$ est de type n-« α » ou la n-échelle d'écriture « α ».*

Définition. — *Si pour tout i, l'écriture sur E_i est finitaire alors la structure numérée est dite une écriture n-finitaire.*

Définition. — *La longueur d'écriture d'un élément x est la somme des longueurs de ses composantes.*

Le lecteur définira les structures de numération par convention.

Exemples de numération

1. Soit $\mathbf{N}$ muni de l'écriture décimale : c'est une échelle d'écriture montante finitaire à base fixe et finie. $K = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$, $B = \{1, 10, ..., 10^i, ...\}$, $\forall i \in \mathbf{N}$ $\mu(10^i) = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.
2. Soit $[0, 1[$ muni de l'écriture décimale : c'est une échelle descendante à base fixe. $K = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$, $B = \{1, 10^{-1}, ..., 10^{-i}, ...\}$, $\mu(10^{-i}) = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.
3. Soit $\mathbf{Q} \cap]0, 1]$ muni de l'écriture p/q avec $p < q$: c'est une échelle d'écriture descendante à base variable monotone. $K = \mathbf{N}$, $B = \{1, 2^{-1}, ..., n^{-1}, ...\}$, $\forall n > 1$ $\mu(1/n) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
4. Soit $\mathbf{Q}_+$ muni de l'écriture p/q, $q \neq 0$, p et q premiers entre eux : c'est une échelle d'écriture descendante variable infinie. $K = \mathbf{N}$, $B = \{1, 2^{-1}, ..., n^{-1}, ...\}$, $\mu(1/n) = \mathbf{N} - \{km,\ k \in \mathbf{N}^*, m|n\}$, $\mu(1) = \mathbf{N}$.
5. Soit $\mathbf{Q}_+$ muni de l'écriture $a \cdot p/q$: c'est une 2-échelle d'écriture avec $\mathbf{N}$ muni de l'écriture décimale et $\mathbf{Q}_+ \cap]0, 1]$ muni de l'écriture p/q avec $p < q$.
6. Soit $\mathbf{Q}_+$ muni de l'écriture décimale : c'est une 2-échelle d'écriture à base fixe avec $\mathbf{N}$ muni de l'écriture décimale et $\mathbf{Q} \cap [0, 1[$ muni de l'écriture décimale.

Numération de Zoki

Les numérations de Zokpé Zoki sont des numérations à bases variables monotones sur des parties essentielles de $\mathbf{Q}_+$ permettant de mettre une 2-échelle d'écriture sur $\mathbf{Q}_+$ et de numérer $\mathbf{Q}$ par convention.

Numération d'ordre m

Définition. — *La numération de Zoki d'ordre $m > 0$, sur $\mathbf{N}$ est la numération montante définie sur $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ par la donnée de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ et de la partie $B = \{0, 1!, (2!)^m, ..., (n!)^m, ...\}$. On notera que seul le nombre 0 vérifie $0 \leqslant 0 < 1$, d'où pratiquement pour l'écriture de position pour les nombres strictement positifs on utilisera plutôt $B' = \{1!, (2!)^m, ..., (n!)^m, ...\}$. L'écriture de 0 étant 0.*

Convention d'écriture. Dans une telle numération de position, chaque élément de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ est un symbole même si ce nombre est exprimé dans une autre numération, par exemple la décimale. Ainsi donc, dans une telle numération, les nombres-chiffres seront séparés par des points qui délimiteront les positions. On pourrait aussi les séparer par des tirets.

On adoptera de surcroît les conventions suivantes :

- un nombre écrit avec les chiffres habituels sans ponctuation est un nombre entier écrit dans la base 10, comme 68 750 ;
- un nombre écrit avec les ponctuations (avec des chiffres habituels ou des nombres-chiffres) est un nombre écrit en numération de Zokpé Zoki. Exemple : 1.17.0.0.1 repésente le nombre d'écriture base 10 38 593 en numération d'ordre 2 de Zoki ou le nombre d'écriture base 10 3 691 009 en numération d'ordre 3 de Zoki. De surcroît la lecture des positions se fera de droite à gauche. Ainsi 1 est le premier nombre-chiffre et 17 en est le quatrième. L'écriture ou la lecture même du nombre se faisant de gauche à droite ;
- pour les nombres représentés par des lettres ou des symboles, $(n)_{Zm}$ signifie nombre entier n écrit en numération Zoki d'ordre m ; $Z_p^m(n)$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture de l'entier n en numération d'ordre m de Zoki ;
- $(2.17.0.0.1)_{Z3}$ signifie « l'écriture de Zoki est en numération d'ordre 3 » soit représente le nomnbre entier 3 691 009 et $Z_4^m(2.17.0.0.1) = 17$.

Définition. — *La numération stricte de Zoki d'ordre $m > 0$, sur $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombre entiers est la numération montante définie sur $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ par la donnée de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ et de la partie $B = \{0, 1!!, (2!!)^m, ..., (n!!)^m, ...\}$. $n!!$ est le produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.*

Convention. Pour les nombres représentés par des lettres ou des symboles, $(n)'_{Zm}$ signifie nombre entier écrit en numération stricte de Zoki d'ordre m ; $Z_p^m(n)'$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture de l'entier n en numération stricte d'ordre m de Zoki.

Définition. — *La numération de Zoki d'ordre* $m > 0$, *sur* $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ *est la numération descendante définie sur* $(\mathbf{Q} \cap]0,1], +, \cdot, \leqslant)$ *par la donnée de la structure* $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ *et la partie* $B = \{1, (2!)^{-m}, ..., (n!)^{-m}, ...\}$. *On notera que seul le nombre 1 vérifie* $1 \leqslant 1$ *d'où pratiquement pour l'écriture de position pour les nombres strictement inférieurs à 1 on utilisera plutôt* $B' = \{(2!)^{-m}, ..., (n!)^{-m}, ...\}$. *L'écriture de 1 est 1.*

Convention d'écriture. Dans une écriture de position, chaque élément de la structure $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ est un symbole même si ce nombre est exprimé dans une autre numération, par exemple la décimale. Ainsi, les nombres-chiffres seront séparés par des points qui délimiteront les positions.

On adoptera de surcroît les conventions suivantes :

- on gardera l'habitude d'écrire, en numération de position, les nombres rationnels non entiers de $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ en précédant leur vraie écriture de « 0, ». Exemple : 0,15 ;
- un nombre écrit avec les chiffres habituels sans ponctuation est un nombre écrit en base 10. Exemple : $0,687\,50$;
- un nombre écrit avec des ponctuations (avec des chiffres habituels ou des nombres-chiffres) est un nombre écirt en numération de Zokpé Zoki. Exemple : 0,1.2.0.0.3 écriture qui représente le nombre $52801/172800$ en numération d'ordre 2 de Zoki ou qui représente le nombre $67/80$ en numération d'ordre 1 de Zoki. De plus la lecture des positions se fera de gauche à droite. Ainsi 1 est le premier nombre-chiffre et 3 en est le cinquième. L'écriture ou la lecture même du nombre se faisant aussi de gauche à droite ;
- pour les nombres écrits ou représentés par des lettres ou des symboles, $(x)_{Zm}$ signifie nombre rationnel x écrit en numération de Zoki ; $Z_p^m(x)$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture du rationnel x en numération d'ordre m de Zoki. Exemple : $(0,1.2.0.0.3)_{Z3}$ signifie « l'écriture de Zoki en numération d'ordre 3 » soit représente le nombre $16\,704\,001/124\,416\,000$ et $Z_2^m(0,1.2.0.0.3) = 2$.

Définition. — *La numération stricte de Zoki d'ordre* $m > 0$ $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ *est la numération descendante définie sur* $(\mathbf{Q} \cap]0,1], +, \cdot, \leqslant)$ *par la donnée de la structure* $(\mathbf{N}, +, \cdot, \leqslant)$ *et de la partie* $B = \{1, (2!!)^{-m}, ..., (n!!)^{-m}, ..\}$.

Convention. On conviendra d'appeler numération de Zoki, sans précision d'ordre, la numération d'ordre 1. De même $(0,1.2.0.0.3)_Z$ signifie « l'écriture de Zoki est en numération d'ordre 1 ». $Z_p(n)$ signifie le nombre-chiffre en position p dans l'écriture de l'entier n en numération de Zoki. Le lecteur retrouvera lui-même les conventions analogues en numération stricte.

Définition. — *La numération de Zoki sur* $\mathbf{Q}_+$ *est la 2-échelle d'écriture définie par la numération de Zoki sur* $\mathbf{N}$ *et la numération de Zoki sur* $\mathbf{Q} \cap]0,1]$.

Définition. — *La numération de Zoki sur* $\mathbf{Q}$ *est la numération par convention obetnue de celle de* $\mathbf{Q}_+$.

Définition. — *La numération mixte de Zoki sur* $\mathbf{Q}_+$ *est la 2-échelle d'écriture définie par la numération décimale sur* $\mathbf{N}$ *et la numération de Zoki sur* $\mathbf{Q} \cap]0,1]$.

Définition. — *La numération mixte de Zoki sur* $\mathbf{Q}$ *est la numération par convention obtenue de celle, mixte, de* $\mathbf{Q}_+$.

Numération de Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0,1]$

Conversion ou écriture

Soit $x = p/q$ une fraction avec $p < q$, $(p,q) \in \mathbf{N}^2$. L'algorithme de conversion ou division zokienne de p par q s'opère ainsi : faire la division usuelle de $2p$ par q ; on obtient $2p = u_1 q + r_1$. $Z_1(x) = u_1$. Faire la division usuelle de $3r_1$ par q ; obtient $3r_1 = u_2 q + r_2$. $Z_2(x) = u_2$. Ensuite faire la division normale de $4r_2$ par q ; on obtient $4r_2 = u_3 q + r_3$. $Z_3(x) = r_3$. Ainsi de suite ... jusqu'au premier reste nul r_k. Alors : la longueur de $(p/q)_Z$ ou nombre de positions de $(p/q)_Z$ est k notée $L((p/q)_Z) = k$ ou $L_Z(p/q) = k$. La dimension zokienne de $(p/q)_Z$ ou nombre d'étages de $(p/q)_Z$ est $k+1$ noté $D(p/q)_Z) = k+1$ ou $D_Z(p/q) = k+1$. La position $Z_i(x)$ est l'étage $i+1$.

Disposition pratique Exemple : $(987/1\ 000)_Z$

étage n	produit nr_{n-1}	reste r_{n-1}	diviseur	quotient
		987	1 000	0
1	987	987		1
2	1 974	974		2
3	2 922	922		3
4	3 688	688		3
5	3 440	440		2
6	2 640	640		4
7	4 480	480		3
8	3 840	840		7
9	7 560	560		5
10	5 600	600		6
11	6 600	600		7
12	7 200	200		7
13	2 600	600		2
14	8 400	400		8
15	6 000	0		6

Commentaire Le lecteur notera l'analogie entre la division euclidienne et la division zokienne. Les deux algorithmes sont identiques. Il n'y a que le fait que la numération décimale est à base finie fixe 10 alors que la numération de Zoki est à base finie variable, base qui est n à l'étage n.

Théorème. — ***L'écriture en numération de Zoki d'une fraction inférieure à 1 est indépendante de son expression*** $(p/q, np/nq, ...)$ ***et a toujours une longueur finie.***

Démonstration : Si $kr_{k-2} = u_{k-1}q + r_{k-1}$ alors on a $k(nr_{k-2}) = (nu_{k-1})q + (nr_{k-1})$. De plus si l'algorithme de division ne s'arrête pas avant, il est obligé de s'arrête à l'étage q. □

Commentaire

- La numération de Zokpé Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0, 1]$ est une numération de position dans laquelle toute fraction a une écriture de longueur finie ;
- la numération de Zokpé Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0, 1]$ est une numération de position dans laquelle tout rationnel a une écriture finie ;
- la numération de Zokpé Zoki sur $\mathbf{Q}$ est une numération de position dans laquelle tout rationnel a une écriture de longueur finie ;
- l'introduction en tant que nombres, à la d'alembertienne, des écritures indéfinies est une fausse analogie due à l'imperfection des systèmes de numération à base fixe. $1/3$ est un nombre en tant que rapport de deux grandeurs mais rapport au sens où la division est effectivement faite. L'écriture indéfinie $0,333\ 333$ ... montre au contraire l'impossibilité de faire la division si l'unité est considérée arbitrairement prédivisée en 10 parts. La numération de Zoki, elle, préconise une prédivision variable de l'unité pour chaque partage spécifié permettant ainsi de réaliser effectivement chaque division.

Opérations de calculs en numération de Zoki sur $\mathbf{Q} \cap]0, 1[$

Dans la donnée de tous les algorithmes, on suppose les conditions réunies de stabilité interne dans $\mathbf{Q} \cap]0, 1[$ des opérations et des résultats des opérations.

Addition et soustraction en numération Zoki Les algorithmes d'addition et de soustraction en numération Zoki sont les mémes que ceux d'addition et de soustraction normales en base fixe. Seules les retenues doivent tenir compte du phénomène de variabilité des bases suivant la position ou plus précisément de l'étage :

$$\begin{array}{ccccccc} & 0, & a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n \\ + & & & & & & & \\ & 0, & b_1 & \cdots & b_k & 0 & \cdots & 0 \\ & 0, & (a_1+b_1) & \cdots & (a_k+b_k) & a_{k+1} & \cdots & a_n \end{array}$$

puis l'on fera les retenues de la manière suivante : si $a_i + b_i \geqslant i + 1$ alors on écrira $c_i = a_i + b_i - (i + 1)$ avec une retenue de 1... ainsi de suite comme dans l'algorithme classique. L'algorithme de soustraction est analogue.

Multiplication par un nombre entier n On multiplie chaque coefficient de chaque étage par n. Puis on fait un report comme suit : si $na_i \geqslant i + 1$ alors on $na_i = t(i + 1) + r$ avec $r < i + 1$. On écrit alors $c_i = r$ avec une retenue de t.

Multiplcation en numération de Zoki La multiplication des écritures zokiennes en numérations de Zoki est fort malaisée. Elle existe mais est assez lourde. Elle est calquée sur le principe de mulitplication des polynômes en tenant compte de la remarque suivante : si m et n sont des entiers tels que $m \leqslant n$, on peut construire au un moins un entier k tel que $(1/m!)(1/n!) = a_k/(n + k)!$ soit $((n + 1)(n + 2) \cdots (n + k)/m!)(1/(n + k)!)$. S'arrêter au permier k tel que $((n+1)(n+2) \cdots (n+k)/m!)$. Il faut donc introduire des tables usuelles et partielles de ce type de produits. Seulement après il faut passer à une longue série de reports. Pour ces opérations il vaut mieux convertir en une numération à base fixe, opérer puis convertir de nouveau. Pour la division il est plus simple de faire la division zokienne d'entiers.

Numération de Zoki et numération mixte de Zoki sur Q

Le lecteur définira les opérations de calculs sur les écritures zokiennes dans l'une ou l'autre de ces numérations. On n'oubliera pas la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour les opérations de multiplication et de division, l'on préférera la sommation de duplications ou plus généralement la sommation de polyplications (multiplication par un nombre entier plus grand que 2).

Numération des Pharaons

Quand on lit l'histoire de l'humanité et l'histoire des mathématiques on se rend compte que bien souvent cett histoire a été écrite à travers un prisme déformant de recherche d'antériorité et de supériorité. Ce prisme de différentiation des cultures sumériennes (*su (a)ma*) et égyptiennes (*(a) ka mi*), prisme d'évaluation relative de l'intelligence d'un système de numération dit de position sur l'autre dit de juxtaposition, oublie que si les uns avaient exotériquement des signes differents, les autre des clous de taille différente, et que dans une même catégorie de signes ou de clous de même taille *su ma* et *ka mi* ne faisaient que de la justaposition [2]. Le prisme de différentiation et de supériorité de culture qui attribue l'intelligence de l'invention du signe 0 à l'illustre hindou anonyme oublie les deux faits suivants :

- une numération de juxtaposition n'a aucune nécessité d'un symbole 0 : l'abscence n'étant plus à constater ;
- quand la culture babylonnienne, prolognegemnt de l'akkadéenne et, de plus loin, de la sumérienne, en viendra trois ou quatre siècles BC (avant *YHE(VHE) SU*) a une même taille des clous, elle créera, à la longue, un symbole de 0 nécessite une numération de position. Et ceci fort longtemps avant notre célèbre hindou inconnu.

Si je reprends la numération de *KA MI* ici, ce n'est pour aucun prisme que ce soit mais jsute pour le fait et l'analyse mathématique. Tout être sensé sait qu'il n'y a ni classe supérieure ni classe antérieure mais rien que des hommes avec leurs petites faiblesses et leurs grandes vanités.

Ne disposant pas de matériel permettant d'illustrer dans cet article la numération des Ka Mê Wo (Kamiou), je prierai le lecteur de consulter, entre autres, « Mathématiques et Mathématiciens » de P. Dedron et J. Itard ou « Une histoire des mathématiques » de A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer. Il notera que les égyptiens avaient un ordre d'apparition de positionnement de chaque catégories de signes. Cet ordre dépendait du développement vers la gauche, la droite ou le bas. Qu'ainsi on avait d'abord le groupe des unités ne dépassant jamais 9, puis le groupe des dizaines ne dépassant jamais 9, puis le groupe des centaines ne dépassant jamais 9, ..., puis le groupe des cent mille ne dépassant jamais 9. Ce qui a fait écrire à Caratini que les égyptiens ne savaient pas compter au delà d'un million sans se rendre compte qu'un manuel scolaire actuel d'un élève de collège comprend des nombres loin, si loin des notations de Knuth, de Graham. Alors juxtaposition ou position ? Le lecteur notera que l'écriture des nombres fractionnaires plus petits que 1 obéissait à l'ordre décroissant d'apparition $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ Ainsi le *Ka Mê Ho To Le Ho Me* (Rot-en le Rome), le *Ka Mê Ne Hên Si* et je pense le *Ka Mê* puis le *Na Mê* (name(ou)) de *Su Ma*, auraient tous noté le nombre 12,95= « 1 signe de dizaine » « 2 signes d'unités » « le signed 1/2 » « le signe 1/4 » « le signe 1/5 » ou en langage moderne $12\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ comme le leur avait enseigné *To Tse Hê Mé*(Thoth-Hermes). Alors juxtaposition ou position ? Disons position différentiée pour le peuple ou juxtaposition de base 10 pour les entiers naturels et juxtaposition de base 2 pour les fractions inférieures à l'unité. Quant à moi je pense que les Égyptiens avaient exotériquement une 2-échelle d'écriture pour les éléments de $\mathbf{Q}_+$: numération décimale pour $\mathbf{N}$ et numération bianaire pour $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ définie par $(\{0,1\}, +, \cdot, \leqslant)$, $B = \{b_n = 1/n,\, n \in \mathbf{N}^*\}$. Bien plus le nom même de *Ahêmê wozé*(Ahmosi dit Ahmès) qui avoue lui même recopier un papyrus de douzième dynastie lequel recopiait peut-être l'enseignement de *To Tse Hê Mé*(Thoth), le fait que le calculateur égyptien était sûr de pouvoir exprimer tout nombre dans sa numération, le fait de certaines décompositions faites dans le payrus de Rhind ou de Moscou, le fait que cette table de décomposition s'arrête à 101 et non 99, oui toutes ces choses m'ont amenés à croire que les prêtres égyptiens détenaient éxotériquement des numérations proches de la numérations de Zoki, notamment la numération mixte de Zoki.

2. je sais bien qu'en hiératique et en démotique les répétitions sont remplacées par des conventions d'écriture : des symboles de nombres ou de chiffres

Les numérations d'Ahmès(Papyrus de RHIND)

Je n'ai pas eu de traduction complète de ce papyrus ; mais des fragments dans les deux livres déjà cités et quelques autres fragments dans « Les étapes de la philosophie mathémaiques » L. BRUNSCHVICG et « Civilisation ou Barbarie » Cheik Anta DIOP. Malgré la rareté des exemples que j'ai eus, je reste persuadé que ceux qui ont composé cette table de décomposition connaissaient la numération de Zoki ou du moins une numération utilisant les produits factoriels, mais qu'ils ont choisi de divulguer au bon peuple celle plus simple d'Ahmès qui en découle et qui témoigne néanmoins de leur connaissance du binaire et du décimal.

1re voie : Soit à décomposer $2/n$, n impair. Prendre k le multiple de factoriel le plus inférieurement proche de n. Considérer $1/k$; faire $(1/k)/(1/n)$ soit n/k en numération zokienne. L'écriture de Zoki ainsi obtenue permet d'exprimer rapidement $1/k = 1/n(1+1/k_1+1/k_2+\cdot+1/k_i)$. Considérer maintenant $2-(1+1/k_1+1/k_2+\cdots+1/k_i)$, prendre $1/t_1$ le 0plus proche (pour trouver $1/t_1$ on peut juste considérer les inverses des factoriels $1/2$, $1/6$, $1/24$,... puis en cas $a/2, a/6, a/24$, ... où a divise le factoriel). Reconsidérer maintenant

$$2-((1+1/k_1+1/k_2+\cdots+1/k_i)+1/t_1).$$

Refaire les mêmes dernières opérations jusqu'à avoir

$$2=\sum_1^i \frac{1}{k_x}+\sum_1^j \frac{1}{t_y}$$

et alors $2/n = 1/k + \sum_1^j 1/nt_y$.

Exemple. — Soit à décomposer $2/13$. On a

$$2\times 6 \leqslant 13 \leqslant 24$$

donc $2/13 = 1/12+\cdots$. Soit $1/12 : 1/13$ soit $(13/12)_z = 1,0.0.2$ donc

$$1/12 = (1/13)(1+2/24) = (1/13)(1+1/12).$$

Soit $2-(1+1/12) = 11/12$, soit

$$2-((1+1/12)+1/2) = 5/12 = 3/12+2/12$$

donc $2-((1+1/12)+(1/2+1/4+1/6)) = 0$ d'où

$$\begin{aligned}2/13 &= 1/12+1/2\times 13+1/4\times 13\\ &= 1/12+1/26+1/52+1/78.\end{aligned}$$

Deuxième voie. Soit à décomposer $2/n$ avec n impair. Faire d'entrée la division zokienne de 2 par n. S'arrêter au premier symbole a non nul, on a donc $2/n = a/b!+\cdots$. Simplifier $a/b!$. On obtient ainsi $1/k$ et on continue ainsi $1/k$ et on continue le processus comme précédemment. Puis, quand on a

$$1/k = 1/n(1+1/k_1+\cdots+1/k_i),$$

considérer

$$2-(1+1/k_1+\cdots+1/k_i) = p/q$$

et que si la dimension zokienne de $(p/q)_z$ n'est pas trop élevée on obtient ainsi rapidement

$$(1/t_1+\cdots+1/t_j),$$

sinon, on continue comme plus haut.

Exemple. — Soit à décomposer $2/13$.

$$(2/13)_z = 0,0.0.3\ldots,$$

on a $2/13 = 1/8+\cdots$, or $1/8 : 1/13$ ou

$$(13/8)_z = 1/13(1+1/2+1/8).$$

Soit $2-(1+1/2+1/8) = 3/8$ d'où, par décomposition au choix $2 = (1+1/2+1/8)+(1/4+1/8)$ donc $2/13 = 1/8+1/52+1/104$ ou alors, par division zokienne, $2 = (1+1/2+1/8)+(1/3+1/24)$, donc

$$2/13 = 1/8+1/39+1/312.$$

Troisième voie. Soit à décomposer $2/n$, où n est impair. Prendre $1/k$ au choix, proche de $2/n$. Ce choix peut être guidé par des considérations comme la facilité des opérations de duplication par 2, par 5, par 10, par 12, par 60 ou par des considérations de simplification de dénominateur trop lourd par les deux voies précédentes. Une fois ce choix effectué, on procède comme dans l'une des deux voies précédentes.

Exemple. — Soit à décomposer $2/13$. Choisissons $1/7$. On a alors $(1/13)_z = 1,1.2.0.2.5.1$ et finalement, d'après la suite de procédés précédente, on trouve $2/13 = 1/7+1/91$.

L'arithmétique d'Ahmès (papyrus de Rhind)

Je ne peux quitter Ahêmê wo zé sans essayer d'expliquer ses pratiques algébriques. Loin de procéder par tâtonnements, celui-ci applique les notions de suite arithmétique, géométrique et dans ses problèmes du premier degré, tout comme dans certains problèmes du second degré spécialement conçus pour être ramenés à des problèmes du premier degré, Ahmès utilise la propriété de la linéarité et de la règle de trois comme suit : si $aX_1 = b_1$ et $aX_2 = b_2$, alors $X_1/X_2 = b_1/b_2$ d'où $X_1 = (X_2)(b_1/b_2)$, donc quand Ahmès a un problème comme ceux des numéros 24 à 29, du premier degré de type $aX = b$, il prend $X_2 = 1$, etc., et il applique sa règle de trois. Et de même les soi-disant « tâtonnements » d'Ahmès ne sont que des exposés de différentes méthodes. Le peuple n'avait qu'à savoir utiliser, il n'avait pas besoin de comprendre. Donc, pas besoin de théories, mais seulement des algorithmes.

Nombres premiers

Définition. — *Un nombre entier n est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.*

Le lecteur qui veut avoir, par curiosité, une connaissance élémentaire de ce qui a été fait avant ces vingt dernières années sur le sujet, peut consulter, *Les nombres premiers*, de J. Itard. Rappelons simplement le résultat suivant.

Théorème (Wilson). — ***Un entier n est premier si et seulement si $n \mid (n-1)! + 1$. En particulier, pour un entier non nul p premier, on obtient $(p-1)! = -1 \ (p)$.***

On doit aussi mentionner le fait qu'en 1974, James P. Jones a donné un polynôme à coefficients entiers à 26 indéterminées dont l'ensemble des valeurs positives est exactement l'ensemble des nombres premiers.

Considérons $\mathbf{Q} \cap]0,1]$ muni de la numération de Zopké Zoki.

Proposition. — *Si un nombre entier $n > 4$ n'est pas premier, alors il existe un entier $k < n$ tel que n divise $k!$.*

Démonstration : Si n possède plusieurs facteurs premiers, on peut écrire $n = n_1^{e_1} \ldots n_t^{e_t}$ et il suffit de prendre $k = \max\{n_1^{e_1}, \ldots, n_t^{e_t}\}$.

Si par contre n est une puissance d'un nombre premier, $n = a^e$, on peut prendre $k = ea$. □

Proposition. — *Si un nombre entier $n > 4$ n'est pas premier, alors la dimension zokienne de son inverse $1/n$ est inférieure à n.*

Démonstration : La proposition précédente et la définition de la division de Zoki font que pour le premier entier k tel que n divise k, la division s'arrête. □

Proposition. — *Si un entier n est premier, alors la dimension zokienne de son inverse est exactement n.*

Démonstration : Arrivé à l'étage n, le résultat de l'opération est multiple de n et donc la division s'arrête.

Supposons que la division s'arrête à l'étage $i < n$, alors, nous aurons

$$\frac{1}{n} = \frac{k_2}{2!} + \frac{k_3}{3!} + \cdots + \frac{k_i}{i!} = \frac{a}{i!}$$

pour un entier a, soit $na = i!$, ce qui est impossible. □

Théorème. — ***Excepté le nombre 4, un entier n est premier si et seulement si la dimension zokienne de son inverse est n, i.e., $D_z(1/n) = n$.***

Démonstration : Cela résulte des deux propositions précédentes. □

Conséquences. pour savoir si un nombre entier n est premier, il suffit d'écrire son inverse en numération de Zoki. C'est la forme de l'écriture zokienne de $1/n$ qui nous renseigne, ou plus précisément sa dimension.

Pratiquement, un algorithme de division zokienne de dimension au plus n suffit à déterminer si n est premier ou non. Il faut au plus $3n$ opérations de multiplication et soustractions, et à aucun stade la valeur d'aucun terme ne dépasse n^2.

Définition. — *Soit $p/q < 1$ et $D_z(p/q) = k$. On appelle zokien de p/q et on note $\mathrm{Zok}(p/q)$ la valeur du nombre-chiffre de la position $k-1$, soit $Z_{k-1}(p/q)$. C'est la valeur du nombre-chiffre de l'étage k.*

Proposition. — *Si me nombre entier n est premier, alors le zokien de son inverse $1/n$ est $n-1$,* i.e., $\mathrm{Zok}(1/n) = n-1$.

Démonstration : On a $1/n = (n-1)!/n!$ or $(1/n!)_z = 0,0.0\ldots0.1$ avec $D_z(1/n!) = n$ donc $((n-1)!/n!)_z = 0,0.\ldots.0.(n-1)!$. D'où $\mathrm{Zok}(1/n) = (n-1)! \mod n$ et d'après le théorème de Wilson, $\mathrm{Zok}(1/n) = -1 \mod n$. Mais comme $\mathrm{Zok}(1/n)$ est élément de l'ensemble des symboles permis à l'étage n, il est strictement inférieur à n et donc $\mathrm{Zok}(1/n) = n-1$. □

On peut aussi montrer que $Z_{n-2}(1/n) = 0$.

Corollaire. — *Un entier n est premier si et seulement si le zokien de son inverse est égal à $n-1$.*

Proposition. — *Soit $p/q < 1$ et $q \neq 4$. Alors, $D_z(p/q) = q$ si et seulement si q est premier.*

Proposition. — *Si n est premier, alors $D_z(1/n^t) = tn$ pour tout entier t non nul.*

Proposition. — *Si m et n sont premiers, alors $D_z(1/(m^u n^v)) = \max(um, vn)$.*

Proposition. — *Soient q et n deux entiers distincts. Si pour un entier t donné, q^t divise n, alors $q^t \leqslant n/2$.*

Corollaire. — *Un entier n est premier dès que $D_z(1/n) > n/2$.*

Proposition. — *Si un entier impair n n'est pas premier, alors $D_z(1/n) \leqslant n/3$.*

Corollaire. — *Un entier n est premier dès que $D_z(1/n) > n/3$.*

Proposition. — *Soit n un entier qui n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre premier donné q. Soient s et t des entiers. Si s^t divise n, alors $s^t \leqslant n/q$.*

Corollaire. — *Soit n un entier qui n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre premier donné q. Alors, n est premier dès que $D_z(1/n) > n/q$.*

Théorème. — ***Soit n un nombre entier. Le zokien $D_z(1/n)$ est le plus petit entier k tel que n divise $k!$. De plus k admet un diviseur premier qui divise n.***

Démonstration : Posons $t = D_z(1/n)$. On a, par calcul des restes de la division de Zoki,

$$t! - n\sum_{i=2}^{t} u_i \prod_{j=i+1}^{t} j = 0,$$

donc n divise $t!$. Soit maintenant $t' < t$ tel que n divise $t'!$. L'algorithme de la division de Zoki donne

$$t'! - n\sum_{i=2}^{t'} u_i \prod_{j=i+1}^{t} j = r_{t'} \neq 0,$$

Comme n divise t', il divise le reste non nul $r_{t'} < t'$. Contradiction. □

Si n divise $k!$, c'est que tous les facteurs de la décomposition de n apparaissent dans $k!$ et qu'il en manquait au moins un dans la décomposition de k, comme k est le premier entier vérifiant ceci. Donc $k = D_z(1/n)$ et k et n sont commensurables, c'est-à-dire possèdent un diviseur commun différent de 1.

Commentaire. Un nombre non premier étant donné, par un jeu d'écritures zokiennes, en cascade, de l'inverse de ce nombre, de l'inverse de la dimension de son inverse, de l'inverse de la dimension de l'inverse de la dimension de ce nombre, etc., on aboutit à pouvoir décomposer ce nombre en produit de facteurs.

Théorème. — ***Soit n un nombre entier. L'avant dernier reste de la division zokienne de 1 par n multiplié par la dimension de l'inverse de n est un multiple de n.***

Démonstration : Cet avant-dernier reste, multiplié par la dimension de $1/n$, est divisible par n, car les opérations de la division zokienne s'arrêtent. □

Constatation. Quand on a $D_z(1/n)$ et cet avant-dernier reste, on décompose plus facilement n en produit de facteurs. En effet, soit $D_z(1/n) = k$ et $r_{k-1} = t$. Diviser kt par n. Soit $q = kt/n$. Soit $k't'$ la simplification de kt par les facteurs de q. On a $n = k't'$.

Constatation. Si $D_z(1/n)$ est un nombre premier alors il divise n ou si l'avant-dernier reste est un nombre premier r, alors il divise n

Théorème. — ***Soit n un nombre premier et m un nombre entier supérieur à n. Le nombre m est premier si et seulement si***

$$D_z\left(\frac{m-n}{mn}\right) = m \textit{ et } \mathrm{Zok}\left(\frac{m-n}{mn}\right) = 1.$$

Démonstration : Soient n et m des nombres premiers. La première factorielle que divise nm donc $D_z(1/nm) = m$. De plus, on a $n(1/nm) = 1/m$, donc si $t = \mathrm{Zok}(1/nm)$, on a $nt \equiv m - 1 \pmod{m}$; or

$$\begin{aligned} \mathrm{Zok}\left(\frac{m-n}{mn}\right) &\equiv (m-n)t \quad (m) \\ &\equiv -nt \quad (m) \\ &\equiv 1 - m \quad (m) \\ &\equiv 1 \quad (m). \end{aligned}$$

Comme ce zokien est strictement inférieur à m, il est bien égal à 1.

Si n est premier, pour tout $m > n$, l'égalité

$$D_z\left(\frac{m-n}{mn}\right) = m$$

n'est possible qui si m est premier ; nm divise $m!$ et on peut conclure. □

Conclusion

J'ai limité dans cet article l'étude des nombres à la numération de Zoki. J'ai terminé le paragraphe sur les nombres premiers par ce théorème que je trouve intéressant pour permettre de donner la distribution des nombres premiers et surtout pour permettre de connaître le nombre premier successeur d'un autre. Je n'ai pas étudié les propriétés des nombres dans les numérations de Zoki d'ordre n. Ainsi, par exemple, en numération d'ordre 2, le nombre 4, non premier, ne se trouve plus être une exception vis-à-vis de la dimension zokienne de l'inverse. Le zokien de l'inverse des carrés des nombres premiers est souvent 1. Le zokien de l'inverse d'un nombre premier est ce nombre. Et il y a autant d'autre propriétés aux ordres 3, 4, 5, etc.. Si je ne me presse pas tant quant à l'étude des nombres, c'est parce que pour moi, essentiellement, j'ai construit les numérations de Zopké Zoki pour montrer qu'une numération de position de l'ensemble des nombres rationnels n'a pas forcément des écritures indéfinies, si l'on veut, infinies (les fractions continues ne sont pas une numération de position : l'écriture finie des nombres rationnels sous forme de fraction continue découle du fait que tout entier est multiple de un). L'homme peut ainsi voir que l'introduction d'écritures infinies, dues alors aux irrationnels, est un acte de choix qui n'a pas d'analogue dans sa pensée. Devant le peu de consistance de quelque métaphysique que ce soit des mathématiques de l'infini actuel, d'Alembert avait beau jeu, par analogie au cas des fractions représentées dans une numération base fixe 10 entre autres, de justifier les pratiques newtonniennes par la notion de limite. En effet, les écritures indéfinies périodiques décimales représentent, mais si mal et par défaut du système de numération, les fractions : nombres dont les suites croissantes des troncatures se rapprochent indéfiniment. Ainsi, par exemple, de l'erreur d'égalité

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333\ldots$$

l'esprit humain a donc très vite glissé à $\sqrt{2}$, π et e, conçus comme limites de suites croissantes des troncatures de développements infinis non périodiques. Et l'homme affirme que ces processus sans fin désignent des nombres, par analogie aux cas fractionnaires comme $1/999$, sans faire attention qu'il effectue un passage à la limite tacite mais non reconnu. Car pour se donner bonne conscience, l'homme se réfugie derrière des axiomes qu'il se donne de la théorie des ensembles ou de la théorie des nombres et derrière la convention découlant d'un de ces axiomes, à savoir

$$1 = 0,999999999\ldots$$

alors qu'en réalité, cette convention vient de l'égalité erronée

$$\frac{1}{3} = 0,333333333\ldots$$

Les axiomes en question sont : l'axiome de l'infini de Tarski, l'axiome du choix, l'axiome d'induction de Péano et l'axiome des segments emboîtés de Cantor. Quand on veut bien les analyser, ces axiomes achèvent l'inachevé ou si l'on veut l'inachevable. Et ce que par euphémisme le mathématicien appelle éléments idéaux, ce sont des (pseudo) éléments contradictoires car ils sont engendrés par la contradiction de l'achèvement de l'inachevable. Ainsi, l'ensemble des entiers, **N**, est l'achèvement non accepté des sections initiales $[0, n[$, l'entier n croissant indéfiniment, tout comme l'ensemble vide, $\varnothing$, est l'achèvement, officiellement accepté, lui, des sections finales $[n, \rightarrow[$. Tenez, que le lecteur, s'il veut bien, et moi, jouions à un petit jeu. Qu'il prenne cette calebasse vide, qu'il essaye de la remplir par les nombres entiers, au fur et à mesure, selon l'ordre de **N**. Il lui est interdit, en raison de la métamathématique (Hilbert) et la pratique mathématique de parler d'un virtuel acte final de ramassage de tous les entiers et ceci, malgré l'axiome de Péano, car sa calebasse se remplit au fur et à mesure et n'est donc pas une calebasse (ou regroupement) déjà constituée qui vérifie : si l'entier n appartient à la calebasse, alors son successeur aussi (justification qui laisse à désirer, bien sûr, mais servie par la pratique mathématique). Mais qu'à cela ne tienne. Qu'il vide entièrement sa calebasse. Je prends, moi aussi, une calebasse **N** mais déjà remplie de tous les entiers. Qu'il se contente juste de ramasser dans sa calebasse les entiers que j'expulse un à un de la mienne, dans l'ordre de **N**. La pratique mathématique me permet, moi, d'expulser tous les entiers (comment ? mystère et boule de gomme), mais elle me le permet puisque ma calebasse peut être vidée. Prétendre à un vide obtenu par une expulsion dernière d'une infinité d'entiers c'est nier l'indéfini et de là, l'infinité même. Prétendre aussi, contrairement à la mathématique, à l'impossibilité d'une calebasse vidée, c'est nier tout infini actuel et surtout tout concept basé sur l'infini. Donc il m'est permis de vider ma calebasse que je vidais un à un même si je n'ai pas un dernier entier vidé, mais le lecteur a-t-il pu achever son remplissage quand ma calebasse s'est trouvée vidée ? Oui, a-t-il pu *achever* son ramassage ?

Non, non et non, l'infini actuel est contradictoire. L'infini actuel sort de la logique humaine tout court et non seulement du tiers exclus. Certes la logique du tiers exclus ne convient pas aux calebasses infinies mais aucune autre logique d'essence humaine non plus. En réalité, l'homme n'a pas besoin de suite infinie d'actes : je viens de le démontrer en ce qui concerne l'écriture, en numération de position, des nombres irrationnels. L'infini n'est introduit que parce que, à une époque, il fallait produire en attendant que la foi vienne. Mais c'est bien de foi dont il s'agit et non de raison. Le « C'est vrai parce que ça marche » ne peut sortir que de la bouche de celui qui ne réalise pas à sa juste mesure l'incomplète adéquation du réel, je veux dire l'existence des pathologies, des paradoxes, des fictions utiles, des éléments idéaux, bref, toutes chose qui ne peuvent participer du réel. L'efficacité, de plus partielle, de résultats n'est pas gage de validité de raisonnement car être mathématicien, c'est être essentiellement déductif et confiant juste en la déduction, mais être mathématicien, ce n'est pas non plus être métaphysicien, c'est-à-dire hors de toute adéquation ou de toute application. Le « C'est vrai parce que ça marche » ne peut sortir que de la bouche de l'empiriste qui cnnait les problèmes mais ne peut pas les résoudre. L'homme, le mathématicien, peut et doit refaire toute la Mathématique sans l'infini actuel, j'en atteste. Et ce sont sur ces mots de confiance en la finitude et l'exactitude de toutes les opérations humaines que j'achève cet article, tout en rappelant : la Mathématique est une science qui a besoin d'une métaphysique (sous-jacente) cohérence, non contradictoire et non hypothético-déductive lui garantissant la certitude de la consistance de ses principes premiers (axiomes) et de l'existence de ses éléments premiers. Faute de cela, elle n'est, du moins pour sa part utile et pratique, qu'empirisme déguisé, science relative, science de recettes qui marchent habillée d'un vernis de déduction.