L-systèmes et polyèdres

Alain Daurat
daurat@llaic.univ-bpclermont.fr

Introduction

Motivations

Si on veut représenter des polyèdres sur un ordinateur, il faut calculer les coordonnées de ce polyèdre. Or ce calcul n'est pas aussi simple qu'il peut paraître. Ce petit article donne une solution. Ce n'est certainement pas la plus élégante ni la plus rapide mais elle fonctionne. (Tous les dessins représentés dans cet article ont été obtenus par cette méthode).

Bon, analysons un peu le problème : on se donne un polyèdre un peu régulier (qu'est ce que ça veut dire ?), on sait qu'une face de tel type est entourée de certaines autres faces d'un autre type. Par exemple pour un ballon de foot on sait qu'un hexagone est entouré par six pentagones. En général ces données permettent de calculer les angles entre les faces (angles de plans) et les angles entre les arêtes (angles de droites) grâce à des petits raisonnements trigonométriques.

Bon, avec ces données il faut essayer de construire le polyèdre. Or il se trouve qu'avec ces données les L-systèmes paraissent bien adaptés.

Les L-systèmes D'abord, un L-systèmes est une suite de mots (M_i) donnée par un axiome M_0 et des règles de substitutions pour passer de M_i à M_{i+1}.

Par exemple si on se donne les règles suivantes :

```
Axiome: A
A --> AA
```

alors on a $M_i = A^{2^i}$.

Dans le cas des L-systèmes chaque mot représente une figure géométrique.

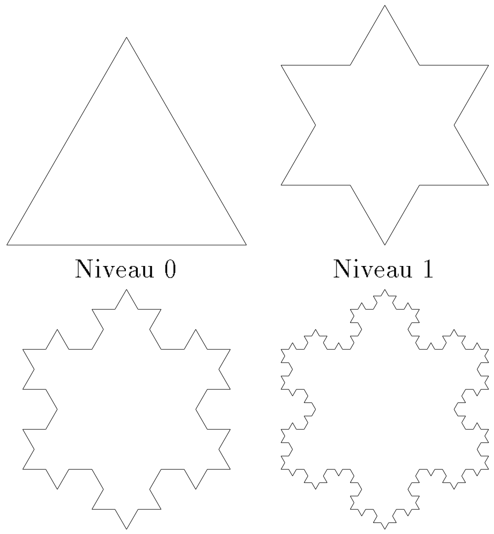
Pour faire ceci il faut imaginer un mobile (la tortue du logo !) qui est commandé par les lettres du mot. Attention beaucoup des lettres n'ont aucune signification pour le mobile et ne sont là que pour la substitution.

Voici dans le plan les symboles standard dans le cas d'un mouvement plan les longueurs et les angles sont fixés à l'avance.

- `F` : avance en traçant ;
- `f` : avance sans tracer ;
- `+` : tourne à droite ;
- `-` : tourne à gauche ;
- `|` : fait demi-tour (tourne de 180 degrés) ;
- `[` : mémorise la position (et l'orientation) du mobile (et le met dans la pile des positions) ;
- `]` : remet le mobile dans la dernière position enregistrée dans la pile des positions (et l'enlève de la pile).

Un exemple de fractal obtenu avec les L-systèmes est le flocon de Von Koch dont la grammaire est la suivante :

```
Axiome: -F++F++F
F --> F-F++F-F
Angle: 60.0 degrés
```



Niveau 0 Niveau 1
Niveau 2 Niveau 3

On peut aussi faire la même chose dans l'espace mais il faut rajouter les symboles suivants.

- `Θ` : tourne vers le haut ;
- `_` : tourne vers le bas ;
- `*` : tourne sur soi-même dans le sens direct (visse) ;
- `/` : dévisse.

En fait si le mobile est assimilé à un repère affine $(M, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (où $\vec{\imath}$ est la direction vers laquelle on avance, $\vec{\jmath}$ la direction des ailes si le mobile était un avion et $\vec{k}$ la troisième direction) alors les symboles `-` et `+` font une rotation dans le plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tandis que les symboles `Θ` et `_` la font dans le plan $(\vec{\imath}, \vec{k})$, et les symboles `*` et `/` dans le plan $(\vec{\jmath}, \vec{k})$.

C'est souvent dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ que l'on travaille de sorte que les symboles `+` , `-` , `Θ` et `_` tournent de l'angle appelé `Angle` qui est plutôt un angle de droite et les symboles `*` et `/` font tourner de l'angle appelé `Rotation` qui est plutôt un angle de plan.

De plus les symboles `0` à `9` permettent de changer la valeur de `Angle` ou de `Rotation`.

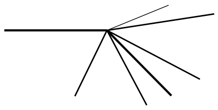
Avec ceci, on peut aussi faire des fractals mais cette fois-ci à trois dimensions.

Par exemple la grammaire

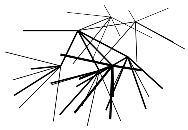
```
Axiome: F
F --> F[+F][*+F][**+F][++F][*++F][*+++F]
Angle: 40 degrés
Rotation: 60 degrés
```

donne les objets suivants :

Niveau 0



Niveau 1



Niveau 2

Application aux polyèdres

On ne va pas chercher ici à définir ce qu'est un polyèdre mais ce qu'il faut avoir en tête : c'est un objet défini par ses sommets, ses arêtes et ses faces qui sont bien sur liés entre eux.

L'intérêt des L-systèmes vient du fait que la grammaire que l'on va attacher à certains polyèdres est fortement liée à ces trois entités.

Prenons l'exemple du ballon de foot (appelé plus pompeusement icosaèdre adouci). C'est un polyèdre à 32 faces : 20 hexagones et 12 pentagones (sur un ballon de foot les hexagones et les pentagones sont de couleur différente il me semble !).

Géométriquement on peut obtenir ce polyèdre en adoucissant l'icosaèdre c'est à dire en coupant les sommets au tiers de chaque arête : chaque face de l'icosaèdre est devenue un hexagone et chaque sommet est devenu un pentagone. Cette première propriété montre que le groupe des isométrie du ballon est le même que celui de l'icosaèdre.

Appelons *face arêtée* (attention à l'orthographe !) un couple (F, A) ou F est une face et A est un arête *orientée* appartenant à cette face.

A une isométrie près il y en a trois sortes : les pentagones pointés (genre XY), les hexagones avec une arête commune à un pentagone (genre TU), et les hexagones avec une arête commune à un autre hexagone (genre VW).

Si l'on raisonne à un déplacement près il y en existe alors six sortes. En effet une face arêtée est aussi munie d'une orientation, celle de cette face. Le vecteur normal à cette face est soit orienté vers l'extérieur du polyèdre (genre X, T, V) soit vers l'intérieur du polyèdre (genre Y, U, W).

L'ensemble des faces arêtées du ballon quotienté par les isométries directes laissant invariant le ballon est donc un ensemble à six éléments soit $\{T, U, V, W, X, Y\}$ ce sont les symboles que l'on va utiliser pour la grammaire.

La configuration des faces du ballon permet alors de trouver une grammaire qui permet de le représenter (voir figure page suvante) :

```
Axiome T
X --> 0[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F
Y --> 0[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F
T --> 1[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F
U --> 1[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F
V --> 1[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F
W --> 1[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F
Angle  72 60
Rotation 142.62 138.18
```

Pour trouver ces angles il suffit d'utiliser le fait que si l'on a trois demi-droites de même origine et si de plus l'on connaît les angles entre ces demi-droites alors on peut calculer les angles entre les plans qu'elles forment (trigonométrie classique).

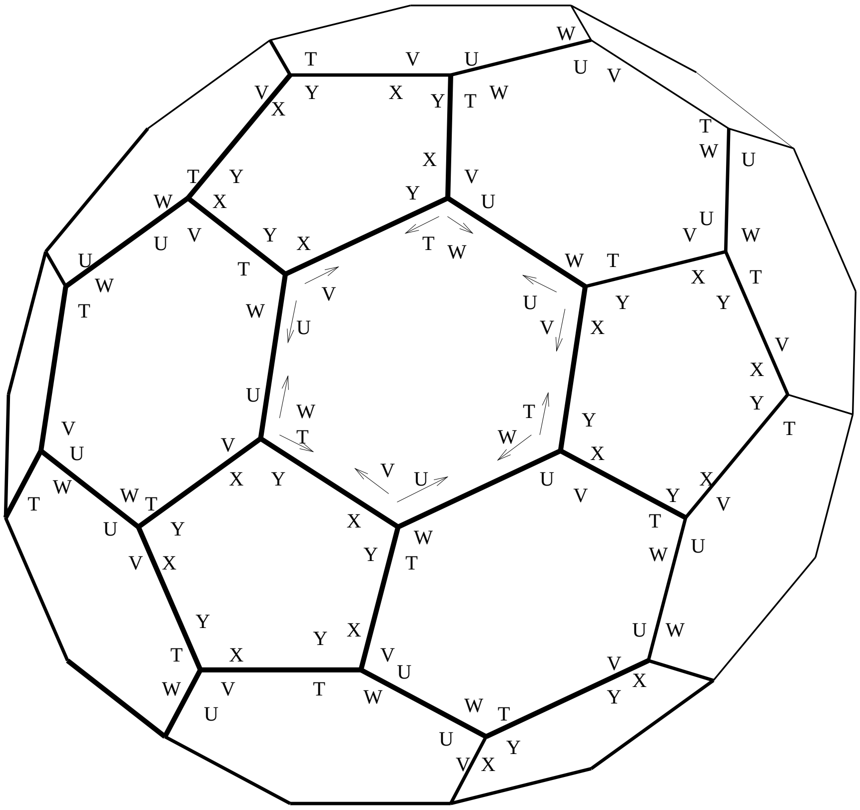
On va passer maintenant à une description plus ou moins exhaustive des polyèdres que l'on peut tracer grâce à cette méthode :

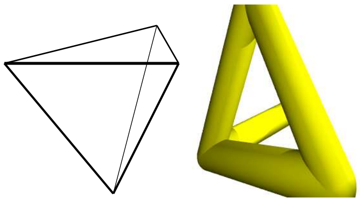
Les polyèdres réguliers (ou platoniciens) Il est bien connu qu'ils sont au nombre de cinq. Les grammaires de ces polyèdres sont les plus simples. En effet dans ce cas il n'y a qu'une sorte de face arêtée aux isométries près et deux sortes à un déplacement près ; il y aura donc toujours deux symboles : X représente les faces dont le vecteur normal se dirige vers l'extérieur et Y les autres.

Les grammaires diffèrent juste par le nombre de côtés des faces.

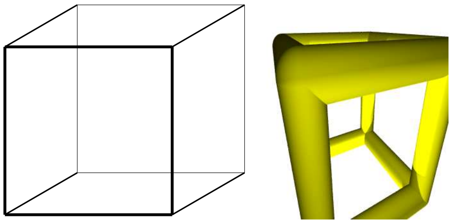
tetraèdre

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 120
Rotation  70.52
Niveau 2
```

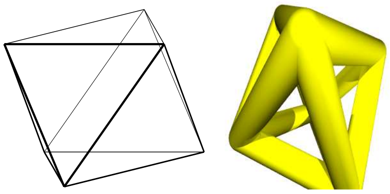




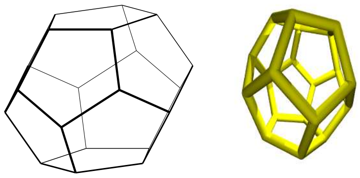
cube
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 90
Rotation 90
Niveau 2
```



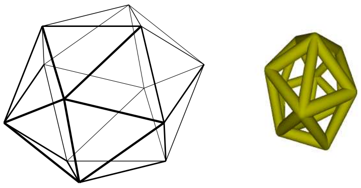
octaèdre
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 120
Rotation  109.47
Niveau 3
```



dodécaèdre
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 72
Rotation  116.56
Niveau 5
```



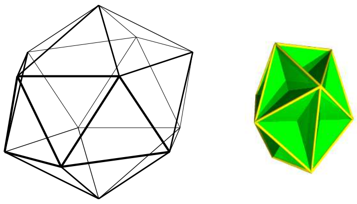
icosaèdre
```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F
Angle 120
Rotation  138.18
Niveau 5
```



Polyèdres réguliers non convexes (étoilés) Il existe trois dodécaèdres et un icosaèdre non convexes réguliers, leurs grammaires sont exactement les mêmes que celles de leurs cousins convexes, seuls les angles changent :

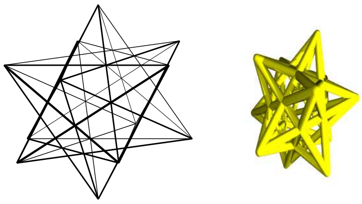
dodécaèdre étoilé de troisième espèce à faces convexes

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F=
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F=
Pas 6
Angle 72
Rotation 63.43494882292201064842780628
Niveau 4
```



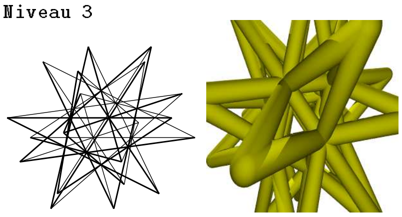
dodécaèdre étoile de troisième espèce à faces étoilées

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Pas 3
Angle 144
Rotation  116.56505117707798935157721937
Niveau 5
```



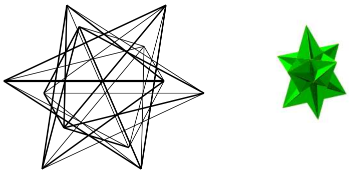
dodécaèdre étoilé de septième espèce

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
Pas 3
Angle 144
Rotation  63.43494882292201064842780628
Niveau 3
```



icosaèdre étoile

```
Axiome: X
X --> [*Y]F#+[*Y]F#+[*Y]F#=
Y --> [/X]F#+[/X]F#+[/X]F#=
Pas 100
Angle 120
Rotation 41.81031489577859806585791680
Niveau 6
```



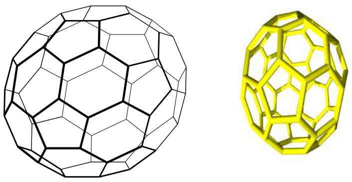
Les polyèdres semi-réguliers (ou archimédiens) Un polyèdre archimédien est un polyèdre dont tous les sommets sont semblables, *i.e.*, pour tous sommets M et M' il existe une isométrie (non forcément directe) laissant invariant le polyèdre et transformant M en M' et dont toutes faces sont des polygones réguliers. On les suppose en général convexes.

Attention, aucune des deux conditions n'entraine l'autre : un prisme à base carrée a tous ses sommets semblables et des faces différentes, une pyramide à base carrée et faces équilatérales a toutes ses faces régulières et des sommets différents.

Il est connu qu'hormis les prismes (à faces triangulaires ou carrées et à base régulière) il n'existe que treize polyèdres archimédiens convexes. (Je n'ai jamais vu de démonstration de ce résultat.)

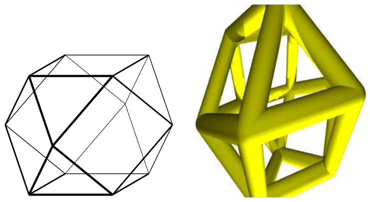
ballon (icosaèdre adouci)

```
Axiome T
X --> 0[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F+[*V]F
Y --> 0[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F+[/T]F
T --> 1[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F
U --> 1[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F+[*W]F+[0*Y]F
V --> 1[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F
W --> 1[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F+[/U]F+[0/X]F
Angle  72 60
Rotation 142.62 138.18
Niveau 5
```



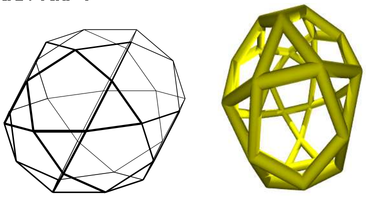
cubooctaèdre

```
Axiome H
G --> 0[*H]F+[*H]F+[*H]F
H --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 120 90
Rotation 125.26 125.26
Niveau 4
```



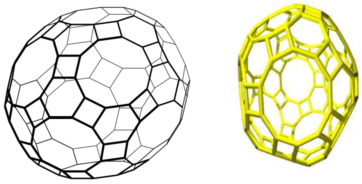
Dodécaèdre adouci (icosaèdre tronqué, triacontado-èdre)

```
Axiome H
G --> 0[*H]F+[*H]F+[*H]F
H --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 120 72
Rotation  142.62 142.62
Niveau 6
```



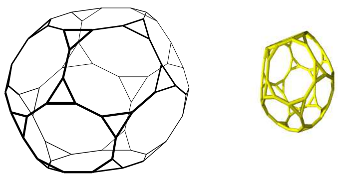
Triacontadoèdre adouci

```
Axiome G
G --> 0[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F
H --> 0[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F
I --> 1[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F
J --> 1[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F
K --> 2[*h]F+[1*j]F+[*h]F+[1*j]F
L --> 2[1*j]F+[*h]F+[1*j]F+[*h]F
g --> 0[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F
h --> 0[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F
i --> 1[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F
j --> 1[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F
k --> 2[/H]F+[1/J]F+[/H]F+[1/J]F
l --> 2[1/J]F+[/H]F+[1/J]F+[/H]F
Angle 36 60 90
Rotation 142.62
                159.09 148.28
Niveau 6
```



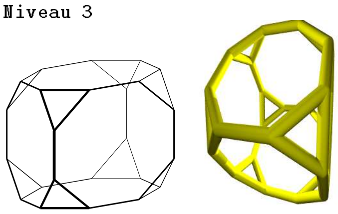
Dodécaèdre tronqué

```
Axiome G
G --> 0[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> 0[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> 0[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> 0[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 36 120
Rotation 116.56 142.62
Niveau 4
```



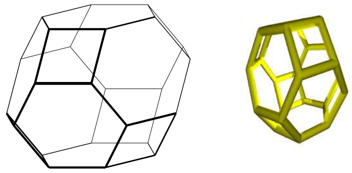
cube adouci

```
Axiome G
G --> 0[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> 0[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> 0[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> 0[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 45 120
Rotation  90 125.26
Niveau 3
```



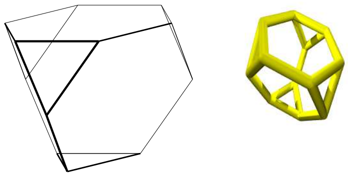
octaèdre adouci (Polyèdre de Lord Kelvin)

```
Axiome G
G --> 0[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> 0[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> 0[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> 0[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 60 90
Rotation 109.47 125.26
Niveau 3
```



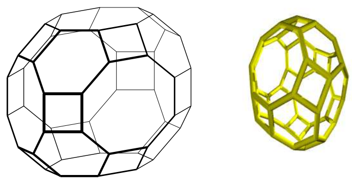
tetraèdre adouci

```
Axiome G
G --> 0[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F
H --> 0[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F+[*h]F+[1*i]F
I --> 1[*g]F+[*g]F+[*g]F
g --> 0[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F
h --> 0[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F+[/H]F+[1/I]F
i --> 1[/G]F+[/G]F+[/G]F
Angle 60 120
Rotation 70.52 109.47
Niveau 2
```



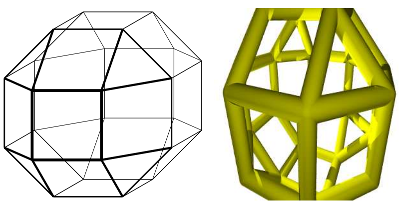
cubooctaèdre adouci

```
Axiome G
G --> 0[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F
H --> 0[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F+[2*k]F+[*i]F
I --> 1[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F
J --> 1[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F+[*l]F+[0*g]F
K --> 2[*h]F+[1*j]F+[*h]F+[1*j]F
L --> 2[1*j]F+[*h]F+[1*j]F+[*h]F
g --> 0[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F
h --> 0[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F+[2/K]F+[/I]F
i --> 1[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F
j --> 1[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F+[/L]F+[0/G]F
k --> 2[/H]F+[1/J]F+[/H]F+[1/J]F
l --> 2[1/J]F+[/H]F+[1/J]F+[/H]F
Angle 45 60 90
Rotation 125.26 144.73 135
Niveau 4
```



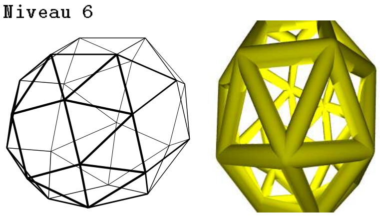
cubooctaèdre tronqué
(faussement tronqué??)

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 0[*g]F+[1*j]F+[*g]F+[1*j]F
I --> 0[1*j]F+[*g]F+[1*j]F+[*g]F
J --> 1[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 0[/G]F+[1/J]F+[/G]F+[1/J]F
i --> 0[1/J]F+[/G]F+[1/J]F+[/G]F
j --> 1[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 90 120
Rotation 135 144.73
Niveau 4
```



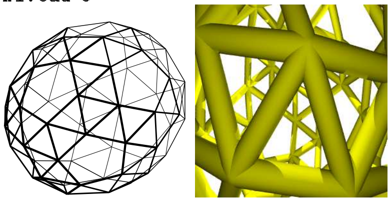
Cube transformé (Snub Cube)

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 2[0*g]F+[*j]F+[1*k]F
I --> 2[1*k]F+[0*g]F+[*j]F+
J --> 2[*j]F+[1*k]F+[0*g]F+
K --> 1[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 2[0/G]F+[1/K]F+[/J]F
i --> 2[1/K]F+[/J]F+[0/G]F
j --> 2[/J]F+[0/G]F+[1/K]F
k --> 1[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 90 120 120
Rotation  142.98  153.23 153.23
Niveau 6
```



Dodécaèdre transformé

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 2[0*g]F+[*j]F+[1*k]F
I --> 2[1*k]F+[0*g]F+[*j]F+
J --> 2[*j]F+[1*k]F+[0*g]F+
K --> 1[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 2[0/G]F+[1/K]F+[/J]F
i --> 2[1/K]F+[/J]F+[0/G]F
j --> 2[/J]F+[0/G]F+[1/K]F
k --> 1[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 72 120 120
Rotation  152.92 164.17 164.17
Niveau 9
```

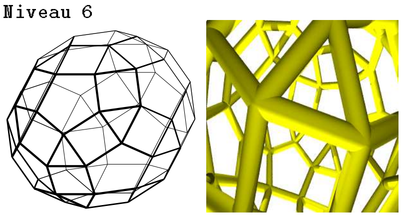


Ces deux derniers polyèdres ont la particularité d'être *chiraux*, c'est à dire qu'ils ne sont pas images d'eux-mêmes dans un miroir.

C'est assez visible dans leur grammaire : en effet ce sont les deux seuls où les règles correspondantes aux faces arêtées rentrantes sont les mêmes que pour les faces sortantes (par exemple la règle correspondant à H est g,j,k alors que la règle pour h est G,K,J). Du coup si on change l'orientation de l'espace on obtient un autre objet.

Triacontadoèdre tronqué

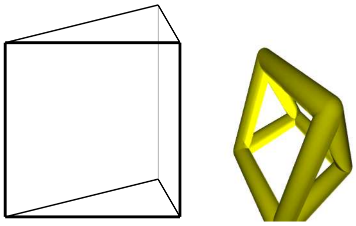
```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[*g]F+[2*j]F+[*g]F+[2*j]F
I --> 1[2*j]F+[*g]F+[2*j]F+[*g]F
J --> 2[*i]F+[*i]F+[*i]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[/G]F+[2/J]F+[/G]F+[2/J]F
i --> 1[2/J]F+[/G]F+[2/J]F+[/G]F
j --> 2[/I]F+[/I]F+[/I]F
Angle 72 90 120
Rotation 148.28 148.28 159.09
Niveau 6
```



Voici les prismes dont j'ai parlé précédemment, je n'ai représenté que les deux premiers de chaque série, ils peuvent tous s'obtenir par cette méthode

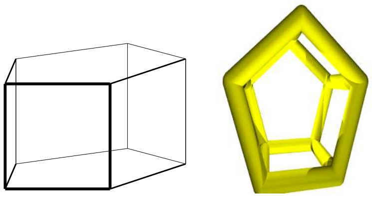
Prisme à faces carrées

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*i]F+[0*g]F+[*i]F
I --> 1[*i]F+[0*g]F+[*i]F+[0*g]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/I]F+[0/G]F+[/I]F
i --> 1[/I]F+[0/G]F+[/I]F+[0/G]F
Angle 120 90
Rotation 90 60
Niveau  2
```



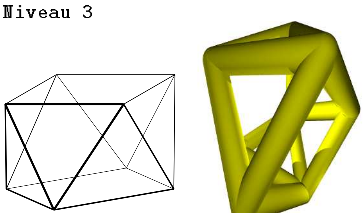
Prisme à faces carrées

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*i]F+[0*g]F+[*i]F
I --> 1[*i]F+[0*g]F+[*i]F+[0*g]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/I]F+[0/G]F+[/I]F
i --> 1[/I]F+[0/G]F+[/I]F+[0/G]F
Angle 72 90
Rotation 90 108
Niveau  2
```



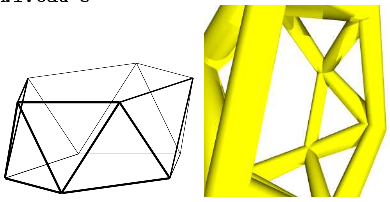
Prisme à faces triangulaires

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*j]F+[*i]F
I --> 1[*j]F+[*i]F+[0*g]F
J --> 1[*i]F+[0*g]F+[*j]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/J]F+[/I]F
i --> 1[/J]F+[/I]F+[0/G]F
j --> 1[/I]F+[0/G]F+[/J]F
Angle  90 120
Rotation 103.83  127.55
Niveau 3
```



Prisme à faces triangulaires

```
Axiome G
G --> 0[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F+[*h]F
H --> 1[0*g]F+[*j]F+[*i]F
I --> 1[*j]F+[*i]F+[0*g]F
J --> 1[*i]F+[0*g]F+[*j]F
g --> 0[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F+[/H]F
h --> 1[0/G]F+[/J]F+[/I]F
i --> 1[/J]F+[/I]F+[0/G]F
j --> 1[/I]F+[0/G]F+[/J]F
Angle  72 120
Rotation  100.81  138.18
Niveau 3
```



Les polyèdres semi-réguliers conjugués

A tout polyèdre on peut associer un autre polyèdre de telle façon qu'à un sommet d'un polyèdre corresponde une face de l'autre et vice-versa : c'est ce qu'on appelle deux polyèdres conjugués. Par exemple le cube et l'octaèdre sont conjugués.

Plus concrètement à tout point $M(a,b,c)$ distinct de l'origine on peut associer le plan $\Phi(M)$ d'équation $ax+by+cz+1=0$ et vice-versa. A une droite D on associe une autre droite qui est l'intersection des plans associés aux points de D. (Tout ce ceci, c'est bien sûr de la dualité en géométrie projective).

Bon, mais un polyèdre étant grosso modo un ensemble de points, de droites et de plans, on peut bien lui associer son conjugué.

Grâce à cette conjugaison, si on sait qu'il existe seulement 13 polyèdres archimédiens alors il existe 13 polyèdres ayant les propriétés duales:

- Pour chaque sommet S, l'ensemble des demi-droites issues de S est régulier.
- Toutes les faces sont identiques

Les faces ne sont donc pas forcément régulières. Mais comme elles sont toutes identiques ces polyèdres sont bien connus des joueurs...

Tous les cotés ne sont pas égaux, mais par contre la première propriété montre que tous les angles de plans entre les faces sont, quant à eux, égaux. Donc il y aura toujours un seul angle `Rotation`, par contre il faut rajouter un paramètre `Pas` qui va changer comme les angles.

Les polyèdres archimédiens avaient leurs sommets tous égaux, ils sont donc inscrits dans une sphère, les polyèdres conjugué eux sont circonscrits à une sphère (ce sont leurs faces qui sont tangentes à la sphère).

La grammaire passe très bien à la conjugaison, les symboles vont donc représenter cette fois-ci des sommets *arêtés*. La structure de la grammaire est la même sauf que l'on remplace l'instruction de tracé `[*X]F+` (resp. `[/X]F+`) par `[F|X]*+` (resp. `[F|X]/`). On peut donc obtenir l'octaèdre en transformant la grammaire du cube

```
Axiome: X
X --> [*Y]F+[*Y]F+[*Y]F+[*Y]F
Y --> [/X]F+[/X]F+[/X]F+[/X]F
```

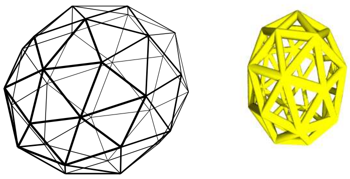
en :

```
Axiome: X
X --> [F|Y]*+[F|Y]*+[F|Y]*+[F|Y]
Y --> [F|X]/-[F|X]/-[F|X]/-[F|X]
Angle 60
Rotation 70.52
```

Voici donc les résultats

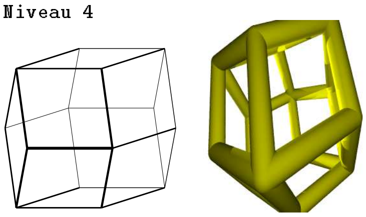
ballon conjugué

```
Axiome T
X --> 0[F|V]*+[F|V]*+[F|V]*+[F|V]*+[F|V]
T --> 1[0F|Y]*+[F|W]*+[0F|Y]*+[F|W]*+[0F|Y]*+[F|W]
U --> 1[F|W]*+[0F|Y]*+[F|W]*+[0F|Y]*+[F|W]*+[0F|Y]
Y --> 0[F|T]/-[F|T]/-[F|T]/-[F|T]/-[F|T]
V --> 1[0F|X]/-[F|U]/-[0F|X]/-[F|U]/-[0F|X]/-[F|U]
W --> 1[F|U]/-[0F|X]/-[F|U]/-[0F|X]/-[F|U]/-[0F|X]
Angle  68.61 55.69
Rotation 23.28 23.28
Pas 1.0746 1.2106
Niveau 5
```



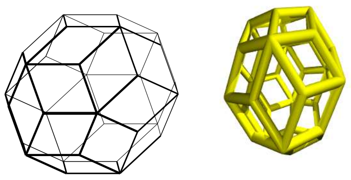
Cubooctaèdre conjugué

```
Axiome H
G --> 0[F|H]*+[F|H]*+[F|H]
H --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 109.47 70.52
Rotation 60 60
Pas 1 1
Niveau 4
```



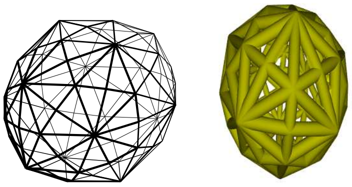
Polyèdre de Romé de l'Isle

```
Axiome H
G --> 0[F|H]*+[F|H]*+[F|H]
H --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 63.43 116.56
Rotation 36 36
Pas 1
Niveau 6
```



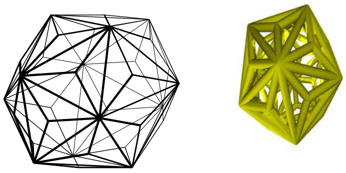
Triacontadoèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G -->
  O[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]
H -->
  O[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]
I --> 1[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]
J --> 1[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]*+[F|l]*+[OF|g]
K --> 2[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]
L --> 2[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]
g -->
  O[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]
h -->
  O[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]
i --> 1[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]
j --> 1[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]/-[F|L]/-[OF|G]
k --> 2[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]
l --> 2[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]
Angle 32.77 58.23 88.99
Rotation 15.11 15.11 15.11
Pas  0.9998 0.5412 0.8502
Niveau 6
```



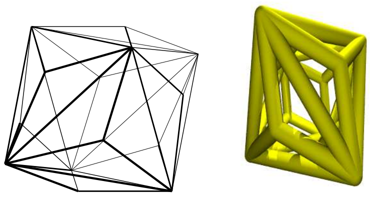
Dodécaèdre tronqué conjugué

```
Axiome G
G -->
  O[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H -->
  O[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g -->
  O[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h -->
  O[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 30.48 119.03
Rotation 19.38 19.38
Pas 1.7485 1.0144
Niveau 4
```



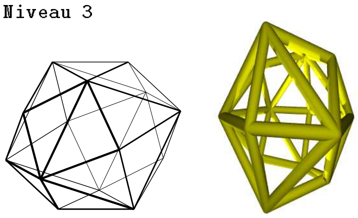
cube adouci conjugué

```
Axiome G
G --> O[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H --> O[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g --> O[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h --> O[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 31.39 117.20
Rotation 32.64 32.64
Pas 1.77 1.04
Niveau 3
```



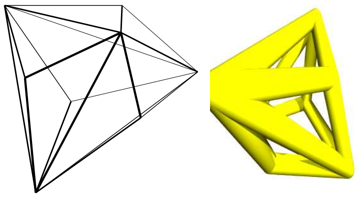
Octaèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H --> 0[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g --> 0[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h --> 0[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 48.18 83.62
Rotation 36.86 36.86
Pas 1.9876 1.4907
Niveau 3
```



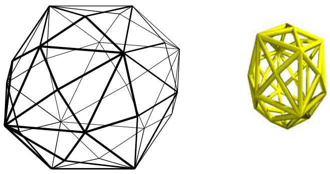
Tétraèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]
H --> 0[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]*+[F|h]*+[1F|i]
I --> 1[F|g]*+[F|g]*+[F|g]*+[F|g]
g --> 0[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]
h --> 0[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]/-[F|H]/-[1F|I]
i --> 1[F|G]/-[F|G]/-[F|G]/-[F|G]
Angle 33.5573 112.8853
Rotation 50.4788 50.4788
Pas    1.8090 1.0854
Niveau 2
```



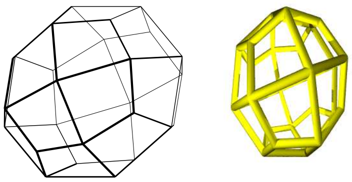
cubooctaèdre adouci conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]
H --> 0[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]*+[2F|k]*+[F|i]
I --> 1[0F|g]*+[F|l]*+[0F|g]*+[F|l]*+[0F|g]*+[F|l]
J --> 1[F|l]*+[0F|g]*+[F|l]*+[0F|g]*+[F|l]*+[0F|g]
K --> 2[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]
L --> 2[1F|j]*+[F|h]*+[1F|j]*+[F|h]
g --> 0[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]
h --> 0[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]/-[2F|K]/-[F|I]
i --> 1[0F|G]/-[F|L]/-[0F|G]/-[F|L]/-[0F|G]/-[F|L]
j --> 1[F|L]/-[0F|G]/-[F|L]/-[0F|G]/-[F|L]/-[0F|G]
k --> 2[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]
l --> 2[1F|J]/-[F|H]/-[1F|J]/-[F|H]
Angle 37.77 55.02 87.20
Rotation 24.91 24.91 24.91
Pas 1.9976 1.2250 1.6387
Niveau 4
```



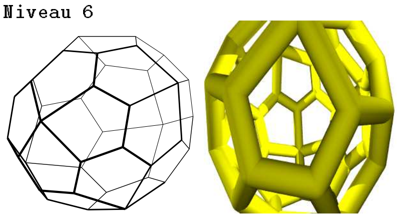
cubooctaèdre tronqué conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 0[F|g]*+[1F|j]*+[F|g]*+[1F|j]
I --> 0[1F|j]*+[F|g]*+[1F|j]*+[F|g]
J --> 1[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 0[F|G]/-[1F|J]/-[F|G]/-[1F|J]
i --> 0[1F|J]/-[F|G]/-[1F|J]/-[F|G]
j --> 1[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 81.57 115.26
Rotation  41.88  41.88
Pas 1.5307 1.1839
Niveau 4
```



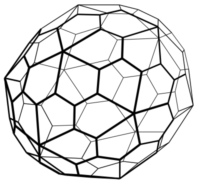
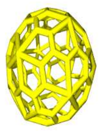
Cube transformé conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 2[0F|g]*+[F|j]*+[1F|k]
I --> 2[1F|k]*+[0F|g]*+[F|j]
J --> 2[F|j]*+[1F|k]*+[0F|g]
K --> 1[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 2[0F|G]/-[1F|K]/-[F|J]
i --> 2[1F|K]/-[F|J]/-[0F|G]
j --> 2[F|J]/-[0F|G]/-[1F|K]
k --> 1[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 80.75  114.81 114.81
Rotation  43.69 43.69 43.69
Pas 0.7718 0.5436 0.5436
Niveau 6
```



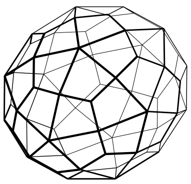
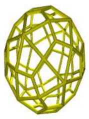
Dodécaèdre transformé conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 2[0F|g]*+[F|j]*+[1F|k]
I --> 2[1F|k]*+[0F|g]*+[F|j]
J --> 2[F|j]*+[1F|k]*+[0F|g]
K --> 1[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 2[0F|G]/-[1F|K]/-[F|J]
i --> 2[1F|K]/-[F|J]/-[0F|G]
j --> 2[F|J]/-[0F|G]/-[1F|K]
k --> 1[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 67.45 118.13  118.13
Rotation 26.82 26.82 26.82
Pas 0.9005 0.5146 0.5146
Niveau 9
```

polyconj13 Triacontadoèdre tronqué conjugué

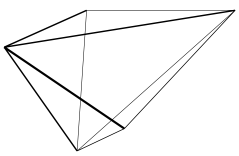
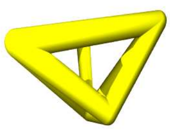
```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[F|g]*+[2F|j]*+[F|g]*+[2F|j]
I --> 1[2F|j]*+[F|g]*+[2F|j]*+[F|g]
J --> 2[F|i]*+[F|i]*+[F|i]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[F|G]/-[2F|J]/-[F|G]/-[2F|J]
i --> 1[2F|J]/-[F|G]/-[2F|J]/-[F|G]
j --> 2[F|I]/-[F|I]/-[F|I]
Angle 67.78 86.97  118.26
Rotation 25.87 25.87 25.87
Pas 1.7933 1.7933 1.1649
Niveau 6
```

Il y a aussi les conjugués des prismes !!!

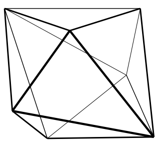
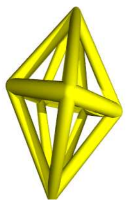
Prisme à faces carrées conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[0F|g]*+[F|i]*+[0F|g]*+[F|i]
I --> 1[F|i]*+[0F|g]*+[F|i]*+[0F|g]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[0F|G]/-[F|I]/-[0F|G]/-[F|I]
i --> 1[F|I]/-[0F|G]/-[F|I]/-[0F|G]
Angle 97.18 41.40
Rotation 81.78 81.78
Pas 1.0079 1.5118
Niveau 2
```

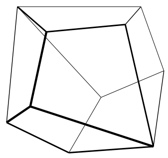
Prisme à faces carrées conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[0F|g]*+[F|i]*+[0F|g]*+[F|i]
I --> 1[F|i]*+[0F|g]*+[F|i]*+[0F|g]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[0F|G]/-[F|I]/-[0F|G]/-[F|I]
i --> 1[F|I]/-[0F|G]/-[F|I]/-[0F|G]
Angle 40.42 69.78
Rotation 60.89 60.89
Pas 1.5421  1.0656
Niveau 2
```

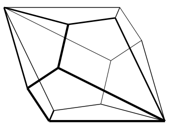
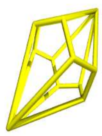
Prisme à faces triangulaires conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[0F|g]*+[F|j]*+[F|i]
I --> 1[F|j]*+[F|i]*+[0F|g]
J --> 1[F|i]*+[0F|g]*+[F|j]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[0F|G]/-[F|J]/-[F|I]
i --> 1[F|J]/-[F|I]/-[0F|G]
j --> 1[F|I]/-[0F|G]/-[F|J]
Angle 54.14 101.95
Rotation 74.85 74.85
Pas 2.1973 1.2871
Niveau 3
```




Prisme à faces triangulaires conjugué

```
Axiome G
G --> 0[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]*+[F|h]
H --> 1[0F|g]*+[F|j]*+[F|i]
I --> 1[F|j]*+[F|i]*+[0F|g]
J --> 1[F|i]*+[0F|g]*+[F|j]
g --> 0[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]/-[F|H]
h --> 1[0F|G]/-[F|J]/-[F|I]
i --> 1[F|J]/-[F|I]/-[0F|G]
j --> 1[F|I]/-[0F|G]/-[F|J]
Angle 36 108
Rotation 63.43 63.43
Pas 3.23 1.23
Niveau 3
```

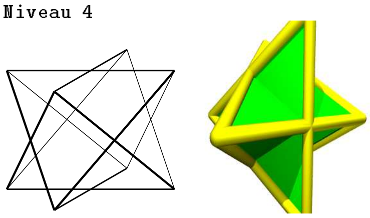



Les autres En ce qui concerne les étoiles archimédiennes (c'est la même chose que les polyèdres archimédiens sauf qu'on enlève l'hypothèse de convexité) on peut sûrement les obtenir avec exactement les mêmes grammaires mais avec des angles différents malheureusement je n'ai pas trouvé de méthode systématique pour le faire.

Pour les polyèdres réguliers composés (on autorise cette fois la non-connexité [en tant que graphe]) j'ai seulement trouvé la grammaire de l'anticube. En fait il s'agit juste de recoller les grammaires correspondant aux différents polyèdres composant le polyèdre.

Anticube

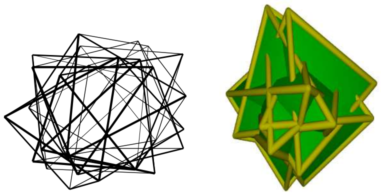
```
Axiome 1[*X]f+f|[*X]
X --> O[*Y]F#+[*Y]F#+[*Y]F#=
Y --> O[/X]F#+[/X]F#+[/X]F#=
Angle 120 90
Rotation  70.52  54.73
Pas 3  1.5
Niveau 4
```



L'étoile octaèdrique (icosaèdre double de cinquième espèce constitué de cinq octaèdres[1] est peut-être obtenue par la grammaire suivante :

etoiloctaedrique

```
Axiome: G
G --> [X][1f-fO+X]1/-O[1f-fO+X]1/-O[1f-fO+X]1/-O[1f-fO+X]1/-O
X --> O[*Y]F#+[*Y]F#+[*Y]F#=
Y --> O[/X]F#+[/X]F#+[/X]F#=
Angle 120 75.52248781407007612122896517
Rotation  109.47 70.52
Pas 3.70 1.02
Niveau 5
```



Pour en savoir plus...

[B] Marcel Berger, *Géométrie*, vol. 3, Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, Nathan, 1977.

[J] Louis Joly, *Les polyèdres : réguliers, semi-réguliers et composés*, Blanchard, 1979.

On trouvait des choses sur les L-systèmes sur Internet, les seules adresses qui sont encore valides sont :

- Des exemples de L-systemes 2D : `http://weblifac.ens-cachan.fr:80/~alf/LSystem/LSystem.html`
- La page que j'avais a Cachan a été transportée à cette adresse : `http://llaic3.u-clermont1.fr/daurat/poly/polye.html`

1. en fait il a 40 faces mais chaque plan facial contient deux faces, on dit donc qu'il a 20 faces doubles