Livres

Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Through Computer Experiments
P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz
Springer Verlag, 1994

Le livre s'ouvre sur des rappels de probabilités : variable aléatoire, distribution de probabilité, moments, indépendance, espérance conditionnelle et les possibilités de simulation des principales lois par un ordinateur. Cela revient à inverser la fonction de distribution F_X, tâche souvent malaisée : on a recours à des méthodes *ad hoc*. Par exemple, si U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans $[0,1]$,

$$G_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$$
$$G_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$$

sont des gaussiennes standard, indépendantes.

L'un des problèmes de la simulation du hasard et la conception des générateurs de nombres pseudo-aléatoire : les générateurs modulaires (?) et leurs problèmes sont évoqués. On peut ensuite vérifier expérimentalement l'indépendance des variables aléatoires, leur adéquation à la loi qu'il sont sensés simuler, ou des théorèmes, par exemple la loi des grands nombres.

Les suites de variables aléatoires indexées par un intervalle de $\mathbf{R}$ constituent le cœur du livre : ils généralisent les chaînes de Markov. Un processus de Wiener est un tel processus à incréments indépendants et $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$. On peut voir ça comme une fonction indexée par l'espace Ω des épreuves. Ces fonctions sont continues (presque sûrement), mais pas différentiables. On peut néanmoins les développer en une « série de Fourier » dont les coefficients sont des variables aléatoires.

Une équation différentielle stochastique est de la forme :

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

où X est l'inconnue, W est un processus de Wiener et a et b des fonctions. Nous ne chercherons pas à donner un sens à dW_t : transformons cela en une équation intégrale,

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s)\,ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)\,dW_s.$$

Il reste à donner un sens à l'intégrale de droite. Notre processus X peut être vu comme une fonction

$$\Omega \longrightarrow \mathscr{C}^0([t_0, t], \mathbf{R}).$$

Fixons donc $\omega \in \Omega$. Il faut donner un sens à

$$\int_{t_0}^t b(s, X_s(\omega))\,dW_s(\omega).$$

On pense à une intégrale de Stieltjes, mais $W(\omega)$ est une fonction continue (presque) jamais à variations bornées. On peut néanmoins considérer

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum b(s_k, X_{s_k}(\omega)) \frac{W_{s_{k+1}}(\omega) - W_{s_k}(\omega)}{s_{k+1} - s_k}.$$

Cela revient à découper l'intervalle $[t_0, t]$ en petits morceaux et à prendre la valeur de b à *gauche* de chacun de ces morceaux : c'est l'intégrale d'Ito. On aurait pu prendre le milieu : c'est l'intégrale de Stratonovitch. On peut vérifier que ça converge, que c'est bien une variable aléatoire (*i.e.*, c'est mesurable) et même une *martingale*. Une conséquence surprenante de ce choix de l'intégrale d'Ito est la suivante : lors du calcul de la différentielle de la composée de deux variables aléatoire, des dérivées d'ordre deux interviennent :

$$dg(X_t) = g'(X_t)\,dX_t + \tfrac{1}{2}g''(X_t)\,dX_t^2.$$

On peut généraliser assez simplement les méthodes d'approximation des solutions d'une équation différentielle ordinaire (Newton) au cas stochastique, mais il faut reprendre l'étude de la convergence. On peut chercher à approcher les chemins du precessus (approximation forte) ou l'espérance de fonctionnelles de ce processus (approximation faible). D'autre part, les problèmes d'instabilité numérique resurgissent.

L'ouvrage se clos par quelques applications : visualisation de systèmes dynamiques stochastique et étude de leur stabilité et de la bifurcation stochastique ; problème de filtrage (on ne connait les conditions initiales de notre équation que de manière imprécise) ; intégrales fonctionnelles en physique (Feynmann) ; simulation de phénomènes financiers.

Ce livre est pour ceux qui comprennent les choses en les faisant, ou en les faisant faire à l'ordinateur : il ne se substitue pas à un ouvrage théorique, mais en constitue un agréable compagnon. On pourra lire en parallèle le livre d'Øksendal, *Stochastic Differentoal Equations.* **V.Z.**

Geometry of the Standard Model of Elementary Particles, Andrzej Derdzinski
Springer Verlag, Lecture Notes in Physics, 1992

Le monde physique a toujours servi d'inspiration aux mathématiques. Cette remarque est rendue plus pertinente par l'avènement de la mécanique quantique, de la théorie des particules élémentaires et de la théorie quantique des champs : ces domaines s'appliquent en géométrie, en théorie des nombres, et des raisonnements physiques « heuristiques » permettent de conjecturer des résultats que l'on démontre ensuite proprement.

Mais le monde des physiciens nous est fermé : ils ne parlent pas la même langue. Ils prennent les outils mathématiques du siècle dernier, qui se ramènent toujours aux nombres et aux fonctions à valeurs numériques et tentent de les utiliser pour manipuler des objets mathématiques plus récents : fibrés, connexions, etc.

La plupart des livres de physique sont écrits dans cette langue archaïsante et approximative. J'en ai trouvé un qui échappe à cette règle.

Les particules élémentaires (photons, quarks, électrons) peuvent être décrites par un fibré vectoriel complexe sur l'*espace-temps*, muni d'une structure géométrique supplémentaire, que l'on interprète comme l'équation vérifiée par les sections correspondant à un état physique.

Certaines opérations sur ces fibrés ont une interprétation physique : le conjugué complexe d'un fibré correspond à l'antiparticule ; une somme directe de fibrés correspond à une superposition de particules, *i.e.*, une particule qui est tantôt d'un type, tantôt d'un autre ; le produit tensoriel (plus exactement, un de ses sous-fibrés) correspond à un mélange de particules, par exemple un neutron est composé de trois quarks.

Cette interprétation en termes de fibrés permet de commencer une classification de particules élémentaires. Ainsi, si le mélange de n particules identiques est décrit par $\mathrm{Sym}^n\,\eta \subset \eta^{\otimes n}$, on dit que c'est un *boson*, dans le cas de $\mathrm{Alt}^n\,\eta$, c'est un *fermion*. Il pourrait y avoir d'autres particules (*anyons*).

Il s'agissait jusqu'à présent de particules libres, *i.e.*, qui n'interagissent pas. Le cas le plus simple de particule en interaction est celui de l'électromagnétisme, régit par les équations de Maxwell qui peuvent se traduire en termes d'un fibré en droites λ et de connexions, décrivant l'état des transporteurs d'interaction. Une particule de charge kq, interagissant, est alors décrite par $\lambda^k \otimes \eta$.

Comme ces équations sont $U(1)$-invariantes : λ est en fait un $U(1)$-fibré. Les équations de Yang–Mills généralisent cela à des G-fibrés.

Les phénomènes de brisure de symétrie correspondent à une réduction de ce groupe G à un sous-groupe : par exemple la transformation d'eau en glace correspond au remplacement de $O(3)$ par un groupe fini.

On peut continuer ainsi : l'interaction forte est décrite par un $SU(3)$-fibré et l'interaction faible par un $U(2)$-fibré. C'est le *modèle standard.*

On peut ensuite tenter de regrouper les trois interactions (électromagnétique, faible et forte) : ce sont les Grandes Théories Unifiées (GUTs). Mais on ne dispose pas pour l'instant de modèle satisfaisant.

Ce livre très concis aborde en termes (presque toujours) mathématiquement corrects, et sans formalisme excessif, la théorie classique des particules élémentaires jusqu'au modèle standard – il ne traite pas la théorie quantique des champs. La Grande Unification est succinctement évoquée et d'autres théories (supersymétrie, cordes) sont passées sous silence.
V.Z.

A Primer of Algebraic D-modules
S.C. Coutinho
Cambridge University Press, 1995

Ce livre constitue une introduction à la théorie des D-modules algébriques sans le formalisme un peu lourd des faisceaux et des catégories dérivées : des méthodes algébriques se révèlent fructueuses pour résoudre des problèmes analytiques — c'est de l'« analyse algébrique ».

Un D-module est un module sur l'algèbre de Weyl : $A_n = k[x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n]$, qui est une sous-algèbre de $\mathrm{End}_k[x_1, \ldots, x_n]$. On peut aussi la définir par générateurs et relations :

$$[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0, \quad [\partial_i, x_j] = \delta_{ij}.$$

C'est un anneau intègre, simple (sans idéal bilatère non trivial). On peut voir que $(x_i^n \partial_j^m)$ est une base de l'espace vectoriel sous-jacent.

A_n est l'anneau des opérateurs différentiels de $k[x_1, \ldots, x_n]$; on peut généraliser cette construction à un anneau quelconque.

$k[x_1, \ldots, x_n]$ ou $\mathscr{H}(U)$ (fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$) sont des modules sur A_n. On peut définir la dimension d'un module M de type fini sur A_n comme le degré du polynome de Hilbert de son gradué par une filtration compatible avec la filtration de A_n par le degré. C'est indépendant du choix d'une telle filtration. On peut interpréter géométriquement cette notion : c'est la dimension de la variété algébrique définie par l'idéal $\operatorname{Rad}\operatorname{Ann}_{k[z_1,\ldots,z_{2n}]}\operatorname{Gr} M$ qui est elle aussi indépendante de la filtration sur M.

La dimension d'un module est en fait comprise entre n et $2n$. Un module est dit *holonome* s'il est de dimension n. De tels modules se comportent de manière beaucoup plus simple : cette propriété est par exemple préservée par image directe et réciproque (dont nous ne détaillons pas la construction).

Donnons maintenant quelques exemples et applications. Si une fonction polynomiale $F : k^n \longrightarrow K^n$ possède une réciproque polynomiale, alors $\det J(F)$ est inversible en tout point. Réciproquement, on peut se demander si la condition $\det J(F) = 1$ suffit à assurer l'existence d'un inverse. En fait, si tout endomorphisme de A_n est un automorphisme, c'est vrai.

Considérons un système différentiel

$$P_1(F) = \cdots = P_m(f) = 0 \qquad (*)$$

où $P_i \in A_n$. On peut lui associer le A_n-module $M = A_n/(P_1, \ldots, P_m)$. L'espace vectoriel des solutions polynomiales de $(*)$ est isomorphe à

$$\operatorname{Hom}_{A_n}(M, k[x_1, \ldots, x_n]).$$

De manière plus générale, si S est l'anneau des fonctions holomorphes, des distributions, des microfonctions ou des hyperfonctions, $\operatorname{Hom}_{A_n}(M, S)$ est isomorphe à l'ensemble des solutions appartenant à la classe de fonctions (généralisées) considérée. Un unique objet, le module associé au système différentiel, permet donc d'appréhender les solutions dans des contextes très divers.

Les D-modules permettent encore d'étudier certains problèmes de stabilité des systèmes dynamiques, ou de trouver des algorithmes pour établir des équations fonctionnelles vérifiées par des fonctions spéciales. **V.Z.**