K-théorie

Vincent ZOONEKYND

Résumé

Pour étudier un anneau, la K-théorie considére la catégorie des modules de type fini sur cet anneau : l'ensemble des objets est muni d'une structure de monoïde. Pour faciliter les calculs, on remplace ce monoïde par le groupe abélien le plus proche. On s'est ramené à l'étude d'un objet plus simple.
Nous définirons les groupes de K-théorie négatifs, qui sont des *invariants* des anneaux considérés. Ils sont reliés par une *suite exacte* qui permet (parfois) de les calculer de proche en proche.
Cet article se veut une présentation succinte de la K-théorie, destinée, destinée à rassurer ceux qui sont effrayés par les mots de cohomologie ou de K-théorie : il s'agit dans ces deux cas de remplacer des objets compliqués (anneaux, espaces topologiques) pas des objets plus simples (groupes abéliens, espaces vectoriels).

Introduction

On rencontre des anneaux dans des domaines très divers : l'étude de $\mathbf{Z}$ est liée à celle des nombres premiers, l'étude des espaces topologiques compacts ou de la géométrie non commutative se ramène à celle des $C^{\star}$-algèbres, l'analyse fonctionnelle se ramène souvent à l'étude d'opérateurs d'un espace de Hilbert, *i.e.*, éléments de l'algèbre de ses endomorphismes.

K_0 d'un anneau

Groupe de Grothendieck. Soit M un semi-groupe commutatif, il existe un groupe abélien KM, appelé *groupe de Grothendieck* et un morphisme de monoïdes $M \longrightarrow KM$ tel que pour tout groupe H et tout morphisme $M \longrightarrow H$ il existe un unique morphsime de groupe $KM \longrightarrow H$ tel que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & KM \arrow[d, dotted] \\ & H \end{tikzcd}$$

Il suffit de prendre l'ensemble de $(x.y) \in M^2$ modulo la relation d'équivalence

$$(x,y) \sim (u,v) \quad \text{si} \quad \exists t \in M \quad x+v+t = u+y+t.$$

Par exemple, $K\mathbf{N} = \mathbf{Z}$ et $K(\mathbf{N} \cup \{\infty\}) = 0$.

K_0A. Soit A un anneau. L'ensemble (c'en est bien un) des classes d'isomorphie des A-modules projectifs (*i.e.*, facteurs directs d'un module libre) de type fini forme un monoïde. Son groupe de Grothendieck est appelé *premier groupe de K-théorie de A* et est noté $K_0(A)$. Par exemple, $K_0\mathbf{R} = \mathbf{Z}$: c'est la dimension des espaces vectoriels.

Remarque. Pour calculer le groupe de Grothendieck à partir de cette définition, il est bon de connaître la structure des modules projectifs de type fini sur notre anneau. Le calcul est donc à peu près immédiat si A est un corps ou un anneau principal. Nous disposons néanmoins d'une description plus concrète de K_0A.

K_0 et idempotents. Notons $GL(A) = \varinjlim GL_nA$ le groupe des matrices carrées inversibles finies d'ordre quelconque (on multiplie des matrices d'ordre différent en rajoutant des 1 sur la diagonale de la plus petite) , $M(A) = \varinjlim M_n(A)$ l'algèbre (sans unité) des matrices finies d'ordre quelconque (on additionne ou multiplie des matrices de tailles différentes en complétant la plus petite par des zéros) et $\operatorname{Idem} A$ l'ensemble des éléments idempotents de $M(A)$. $GL(A)$ agit par automorphismes intérieurs sur $\operatorname{Idem} A$. L'ensemble des orbites de cette action est un semi-groupe pour la loi $p \cdot q = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right)$, qui est isomorphe au semi-groupe des modules projectifs de type fini sur A. On peut calculer K_0A par ce biais.

Invariance de Morita. Un corollaire du résultat précédent est : $K_0A = K_0M_n(A)$.

Exemples. Comme un module projectif de type fini sur un corps, un anneau principal ou un anneau local est libre, avec un rang bien défini, le premier groupe de K-théorie est dans un tel cas $\mathbf{Z}$.

Si A est un anneau de Dedekind et $\mathscr{C}\ell A$ son groupe des classes, on peut montrer que tout module projectif de type fini est de la forme $A^n \oplus I$, où I est un idéal de A, et donc :

$$KA = \mathbf{Z} \times \mathscr{C}\ell A.$$

K_0 relatif. Si I est un idéal bilatère de l'anneau A, posons

$$D(A,I) = \{(x,y) \in A \times A \ : \ x - y \in I\}.$$

On a une suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow D(A,I) \longrightarrow A \longrightarrow 0$. On définit alors :

$$K_0(A,I) = \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_{1*} : K_0 D(A,I) \longrightarrow K_0 A).$$

Théorème. On a une suite exacte :

$$K_0(A,I) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1*}} K_0 A \xrightarrow{q_*} K_0(A/I).$$

Excision. Si I est un anneau non nécessairement unitaire, notons I_+ l'anneau $= I \oplus \mathbf{Z}$ où la multiplication est donnée par $(x,n)\cdot(y,m) = (xy+ny+mx, mn)$: c'est un anneau unitaire. Posons $K_0 I = \mathrm{Ker}(K_0 I_+ \longrightarrow K_0 \mathbf{Z})$. Si I était déjà unitaire, cela coïncide avec la définition antérieure. Le théorème d'excision dit que $K_0(A,I) = K_0 I$, *i.e.*, la K-théorie relative ne dépend pas de l'anneau mais uniquement de l'idéal.

K-théorie topologique et théorème de Swann. Un *fibré vectoriel* sur un espace topologique X (que nous supposerons compact) est une application continue $\pi : E \longrightarrow X$ telle que tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert U, avec des isomorphismes $\varphi_U : \pi^{-1}U \simeq U \times \mathbf{R}^n$. Cela permet de munir les fibres $\pi^{-1}(\{x\})$ d'une structure d'espace vectoriel — on demande que cette structure ne dépende pas du choix de U, *i.e.*, que les $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ soient linéaires sur les fibres :

$$\begin{tikzcd}
(U\cap V)\times\mathbf{R}^n \arrow[dr] & \pi^{-1}(U\cap V) \arrow[l, "\varphi_V"'] \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & (U\cap V)\times\mathbf{R}^n \arrow[dl] \\
& U\cap V. &
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme de fibrés vectoriels* est une application continue entre les espaces totaux $E \longrightarrow F$ commutant aux projections

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\
& X. &
\end{tikzcd}$$

On définit $K^0 X$ comme le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels sur X. C'est le premier groupe de K-théorie topologique.

Théorème de Swann. Soit X un espace compact. On a un isomorphisme $K^0 X \simeq K_0 \mathscr{C}(X)$.

Périodicité de Bott. On définit alors la K-théorie (à support compact) d'un espace topologique non nécessairement compact X : $K_c^0 X := K_0 \mathscr{C}_c(X)$ (attention, on prend les fonctions continues à support compact), puis la K-théorie négative,

$$K^{-i} X = K_c^0(X \times \mathbf{R}^i) = K_0 \mathscr{C}_c(X \times \mathbf{R}^i),$$

qui s'avère être périodique : $K^{n+8} X \simeq K^n X$ (la période est égale à 2 dans le cas complexe). En prolongeant par périodicité, on obtient la K-théorie positive.

Démonstration : Si E est un fibré vectoriel, l'espace de ses sections

$$\Gamma(X,E) = \{s : X \longrightarrow E, p \circ s = \mathrm{Id}_X\}$$

est un $\mathscr{C}(X)$-module.

Montrons que c'est un module de type fini. Considérons un recouvrement trivialisant fini, les fonctions coordonnées engendrent les $\Gamma(U,E)$; en les multipliant par une partition de l'unité, on obtient des sections globales qui engendrent $\Gamma(X,E)$.

Montrons que c'est un module projectif. Soient $s_1, \dots, s_k$ des générateurs de $\Gamma(X,E)$. Le morphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} X \times \mathbf{C}^k & \longrightarrow & E \\ (x, v_1, \dots, v_k) & \longmapsto & \sum v_i s_i(x) \end{array} \right.$$

est surjectif sur les fibres. Posons $E' = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Si on choisit une métrique hermitienne sur E (il suffit d'en prendre sur des ouverts trivialisants et de les recoller avec une partition de l'unité), φ possède un adjoint, injectif, $E \longrightarrow X \times \mathbf{C}^k$, d'image $(E')^\perp \simeq E$. On a donc $X \times \mathbf{C}^k \simeq E \oplus E'$, d'où

$$\Gamma(X,E) \oplus \Gamma(X,E') \simeq \Gamma(X \times \mathbf{C}^k) \simeq \mathscr{C}(X)^k.$$

Soit P un module projectif : Montrons qu'il est de cette forme. En écrivant $P \oplus Q = \mathscr{C}(X, \mathbf{C}^n)$, on peut voir les éléments de P comme des fonctions $X \longrightarrow \mathbf{C}^n$. Posons $E = \{(x, v_1, \dots, v_n) \in X \times \mathbf{C}^n \ : \ \exists s \in P,\ s(x) = (v_1, \dots, v_n)\}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que la projection sur le premier facteur $E \longrightarrow X$ est un fibré vectoriel. $\square$

Structure d'anneau. On peut vérifier que le produit tensoriel des fibrés vectoriels induit une structure d'anneau sur $K_0 A$.

K_1 des anneaux

Nous avons vu l'intérêt de l'étude de la catégorie des modules pour celle d'un anneau. Mais une catégorie est essentiellement déterminée par ses *morphismes*, or, pour construire K_0, nous nous sommes limités aux objets.

Construction concrète de K_1. Notons $E(A,n)$ le sous-groupe de GL(A) engendré par les matrices élémentaires, *i.e.*, ne contenant des 1 sur la diagonale et ayant au plus un autre terme non nul et posons $E(A) = \bigcup E(A,n) \subset GL(A)$. Nous définissons alors K_1 comme le plus grand quotient abélien de $GL(A)$:

$$K_1 A = (GL(A))_{\mathrm{ab}} = GL(A)/E(A).$$

Démonstration : Si $e_{i,j}(a)$ sont les matrices élémentaires, $e_{ij}(a) = [e_{ik}(a), e_{kl}(1)]$, et donc $E(A) = [E(A), E(A)] \subset [GL(A), GL(A)]$. Si $A, B \in GL(A,n)$, on a :

$$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & B^{-1}A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or, toute matrice trigonale est dans $E(A)$. D'où $[GL(A), GL(A)] = E(A)$, puis

$$GL(A)_{\mathrm{ab}} = \frac{GL(A)}{[GL(A), GL(A)]} = \frac{GL(A)}{E(A)}. \qquad \square$$

Exemples. Si A est un anneau commutatif, le déterminant induit une surjection $K_1 A \longrightarrow A^\times$. Si A est un corps commutatif, c'est un isomorphisme. Si A est un anneau local (non nécessairement commutatif), on peut définir un déterminant non commutatif induisant un isomorphisme $K_1 A \simeq A^\times_{\mathrm{ab}}$. Si A est un anneau euclidien, $K_1 A = A^\times$.

K_1 relatif. Posons

$$K_1(A,I) = \mathrm{Ker}(K_1 D(A,I) \longrightarrow K_1 A).$$

On peut montrer que c'est isomorphe à $GL(A,I)/E(A,I)$, où $GL(A,I)$ est le noyau de $GL\,A \longrightarrow GL(A/I)$ et $E(A,I)$ est le plus petit sous-groupe normal de $GL\,A$ contenant les $e_{ij}(a)$, $a \in I$. On dispose d'une suite exacte :

$$\begin{tikzcd} K_1(A,I) \arrow[r] & K_1 A \arrow[r] & K_1(A/I) \arrow[d, "\partial"] \\ K_0(A/I) & K_0 A \arrow[l] & K_0(A,I) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

K_1 d'une catégorie. Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie abélienne, nous définissons $K_0\mathfrak{C}$ comme le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphie d'objets de $\mathfrak{C}$ et $K_1\mathfrak{C}$ comme le groupe abélien engendré par les (P,α), où P est un objet de $\mathfrak{C}$ et α un automorphisme de P nodulo les relations $(P,\alpha) = (P_1,\alpha_1) + (P_2,\alpha_2)$ si

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

K-théorie négative

Invariance par homotopie. La K-théorie topologique est invariante par homotopie : si $A = \mathscr{C}(X)$ et $A' = \mathscr{C}(X \times \mathbf{R})$, alors $K_0 A \simeq K_0 A'$. Sur le plan algébrique, comme $A[X]$ est dense dans A', on peut espérer un isomorphisme entre $K_0 A$ et $K_0 A[t]$, induit par l'application

$$\begin{cases} A[t] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & 0. \end{cases}$$

C'est bien le cas sous certaines conditions (si A est régulier à gauche). Dans le même ordre d'idées, $A[t,t^{-1}]$ est dense dans $\mathscr{C}(X \times \mathbf{S}^1)$. Ces deux anneaux, $A[t]$ et $A[t,t^{-1}]$ interviennet dans la construction des groupes de K-théorie négative.

K-théorie négative. On peut montrer que

$$K_0 A = \mathrm{Coker}(K_1 A[t] \oplus K_1 A[t^{-1}] \longrightarrow K_1 A[t,t^{-1}],$$

on définit donc par récurence :

$$K_{n-1} A = \mathrm{Coker}(K_n A[t] \oplus K_n A[t^{-1}] \longrightarrow K_n A[t,t^{-1}].$$

On dispose alors d'une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & K_0 A \arrow[r] & K_0(A/I) \arrow[r] & K_{-1} I \arrow[d] \\ \cdots & K_{-2} I \arrow[l] & K_{-1}(A/I) \arrow[l] & K_{-1} A \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Contrairement à la K-théorie topologique, ces groupes ne sont pas périodiques, il faut donc trouver autre chose pour définir la K-théorie positive.

Le K_2

K_0 classifiait les objets, *i.e.*, généralisait la théorie de la dimension ; K_1 étudiait le fait que $GL(A)$ n'est pas engendré par les matrices élémentaires ; K_2 s'intéresse aux relations non triviales entre les matrices élémentaires : c'est ce que K_2A mesure.

Groupe de Steinberg. $\mathrm{St}\,A$ est le groupe engendré par les $x_{ij}(a)$, $a \in A$, modulo les relations

$$\begin{aligned} x_{ij}(a)x_{ij}(b) &= x_{ij}(ab) \\ x_{ij}(a)x_{kl}(b) &= e_{kl}(b)e_{ij}(a) \quad \text{si } j \neq k \text{ et } i \neq l \\ x_{ij}(a)x_{jk}(b)x_{ij}(a)^{-1}x_{jk}(b)^{-1} &= e_{ik}(ab) \\ x_{ij}(a)x_{ki}(b)x_{ij}(a)^{-1}x_{ki}(b)^{-1} &= x_{kj}(-ba) \end{aligned}$$

Les deux dernières s'entendent pour i, j et k différents. Comme le groupe $E(A)$ des matrices élémentaires vérifie aussi ces relations, on a un morphisme $\mathrm{St}\,A \longrightarrow E(A)$. On pose alors

$$K_2A = \mathrm{Ker}(\mathrm{St}\,A \longrightarrow E(A)).$$

Groupes de K-théorie supérieure

Nous n'aborderons pas ici la K-théorie positive : on peut construire K_nA, pour $n \geqslant 0$, comme groupes d'homotopie d'un espace topologique construit à partir de A.

Applications

Avant tout, les groupes de K-théorie sont des *invariants* : si A et B sont des anneaux isomorphes, alors K_0A et K_0B sont aussi isomorphes (mais ce n'est pas une condition suffisante d'isomorphie). En particulier, pour montrer que A et B ne sont pas isomorphes, il suffit de montrer que K_0A et K_0B ne sont pas isomorphes.

La K-théorie est aussi un outil dans certaines démonstrations (par exemple, l'existence de H-structure sur certaines sphères).

La K-théorie intervient dans la démonstration du théorème de l'indice d'Atiyah–Singer (un analogue du théorème de Riemann–Roch) qui permet de calculer l'indice d'un opérateur de Fredholm (ou d'un complexe d'opérateurs), ou les dimensions d'espaces de cohomologie.

Pour en savoir plus...

[BB85] B. Booss and B. Bleecker, *Topology and analysis : the Atiyah–Singer index formula and gauge-theoretic physics*, Springer Verlag, 1985.

[Bla86] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Springer Verlag, 1986.

[Kar78] M. Karoubi, *K-theory : an introduction*, Springer Verlag, 1978.

[Mil71] J.W. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, 1971.

[Ros94] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Springer Verlag, 1994.