L'axiome du choix

Raphael Bomboy

Introduction

Le point de départ de cet article est, je crois, une question qui surgit lors d'une leçon d'agreg à laquelle je n'assistais pas. Rappelons qu'un anneau noethérien est un anneau dans lequel tout idéal est de type fini. Ce qui équivaut à dire que toute suite croissante d'idéaux de cet anneau est stationnaire. La question était : cette équivalence utilise-t-elle l'axiome du choix ? L'ouvrage (par ailleur excellent) de Jean Perrin [Per82], et par suite l'agrégatif au tableau ce jour là, affirmait que non. Eric Halberstadt fit remarquer que si et fut je crois mal compris. De là vient mon envie d'écrire cet article, article qui m'obligea à des investigations qui m'emmenèrent plus loin qu'initiallement prévu, et furent à l'origine de questions dont j'ignore encore la réponse (si quelqu'un sait quelque chose à ce sujet...).

L'essentiel de ce qui va suivre vient de mes discussions avec Eric Jaligot, Maurice Pouzet et mes collègues agrégatifs, qu'ils en soient remerciés.

Au fait, quel est le lien de tout ceci avec le lemme de Baire ? Patience, j'y reviendrai.

Le lemme de Baire

Je ne fais ici que rappeler le lemme de Baire et sa démonstration la plus classique. Ceux qui connaissent déjà ceci peuvent se rendre au paragraphe suivant.

Lemme. *Soit E un espace de Banach, $(O_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de E. Alors $\cap_{i\in\mathbf{N}} O_n$ est dense dans E.*

Démonstration : Il suffit de montrer que pour tout ouvert O de E, $O \bigcap (\cap_{i\in\mathbf{N}} O_n)$ n'est pas vide.

Soit donc O un ouvert de E. O_1 étant dense dans E, $O \cap O_1$ n'est pas vide et on peut choisir $x_0 \in E$ et $r_0 < 1$ tels que $B(x_0, r_0) \subset O \cap O_1$ ($B(x_0, r_0)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r_0).

On construit par récurence une suite $((x_n, r_n))_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n/2) \bigcap (\cap_{1\leqslant i\leqslant n+1} O_i)$ et $r_n < 1/n$. Pour cela, supposons cette suite construite jusqu'a l'ordre n. O_{n+1} étant dense dans E, $B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ n'est pas vide et on peut choisir $x_{n+1} \in E$ et $r_{n+1} < 1/(n+1)$ tels que $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n/2) \cap O_{n+1}$.

On vérifie alors facilement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de cauchy, donc qu'elle converge car E est complet. Sa limite l est dans $\cap_{n\in N} O_n$ car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $l \in \overline{B(x_n, r_n/2)} \subset B(x_n, r_n)$. $\square$

L'axiome du choix

On ne peut rien démontrer si on ne part pas d'une hypothèse de départ ; depuis Euclide, les mathématiciens utilisent tous plus ou moins une méthode axiomatique, c'est à dire qu'il partent d'un ensemble d'axiomes qu'ils jugent intuitivement évident et se donnent ensuite un ensemble de règles de démonstration (les logiciens disent règles d'inférences) qui leur permettent de démontrer de nouveaux théorèmes à partir de ces axiomes. Cela ne signifie pas qu'ils ont en permanence ces axiomes et ces règles d'inférences en tête lors de leur pratique quotidienne des mathématiques, mais qu'ils sont à peu près persuadés que s'ils y mettaient le temps voulu, ils pourraient formaliser entiérement leurs démonstrations.

On ne peut pas non plus définir tout les objets mathématiques à partir de rien, c'est à dire qu'on doit se donner un certain nombre d'objets de base dont la définition est intuitivement évidente. Au début du siècle eu lieu une tentative pour construire tout les objets mathématiques à partir des seules notions d'ensemble et d'appartenance ; c'est ce point de vue qui c'est imposé, et on définit aujourd'hui $\mathbf{N}$ comme étant le plus petit ordinal infini, $\mathbf{Z}$ comme ensemble des classes d'une relation d'équivalence sur $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Q}$ comme ensemble des classes d'une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}^2$, $\mathbf{R}$ à partir de l'ensemble des coupures de $\mathbf{Q}$, etc.

Si nous construisons les mathématiques à partir de la théorie des ensembles, ils nous faut axiomatiser celle-ci. Certains des axiomes couramment admis depuis le début du siècle ne sont pas discutés, ce sont ceux de Zermelo-Fraenkel ; pour ceux-ci, voir par exemple [CL94],[Kri72] ou [Jec78]. Un autre des axiomes proposés au début du siècle a été plus contesté : c'est l'axiome du choix, que nous énonçons ici.

Axiome (du choix). *Soit X un ensemble d'ensembles tous non vides. Alors il existe une fonction f, définie sur X et à valeurs dans $\cup_{x\in X} x$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) \in x$ (une telle fonction sera appelée fonction de choix).*

Remarque. En thérie des ensembles, tout est un ensemble. La notion d'«ensemble d'ensembles» est donc un pléonasme. Dans la définition ci-dessus, j'aurais pu dire «Soit X un ensemble dont tout les éléments sont non vides...» .

L'axiome du choix est bien un axiome, c'est à dire qu'on ne peut ni le démontrer, ni l'infirmer (c'est à dire démontrer son contraire) à partir des axiomes de Zermelo-Fraenkel (du moins si ceux-ci non contradictoires). Des explications s'imposent ici : comment peut-on démontrer que quelque chose n'est pas démontrable ? Pour cela, il faut faire ce qu'on appelle de la logique mathématique, c'est à dire commencer par définir formellement ce qu'est une formule (c'est un suite finie de symbole dans un alphabet donné), la démontrabilité et la vérité d'une formule, etc., et le définir formellement dans le cadre que nous nous sommes donné, c'est à dire à partir de la notion d'ensemble. Ces objets sont alors des objets mathématiques, comme peuvent l'être $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, un groupe ou un espace vectoriel, et on peut donc démontrer des théorèmes les concernant, par exemple qu'une formule n'est pas conséquence d'un ensemble d'axiome donné.

Certains pensent qu'on trompe le lecteur en parlant ainsi des mathématiques en termes mathématiques ; il n'y a pourtant là-dessous aucun sophisme. Les objets qu'on manipule modèlisent le raisonnement mathématique, comme $\mathbf{R}^3$ modèlise l'espace physique qui nous entoure ; mais leur signification intuitive n'infère pas sur la rigueur des raisonnements qu'on peut tenir à leur sujet. Ce sont bien des objets mathématiques, et la logique mathématique est une branche des mathématiques, pas de la métaphysique. Notons d'ailleurs que cette branche contient aujourd'hui des résultats non triviaux, qu'elle s'est scindée en plusieurs directions, et qu'elle s'est éloignée de ses motivations initiales pour se rapprocher d'autres domaines des mathématiques, comme l'algèbre ou l'informatique théorique. C'est un indice de son sérieux et de son intérêt, et on peut penser que la logique éliminera le doute que font peser certains sur la validité de ses raisonnements grâce à l'efficacité de ses résultats (c'est vrai parce que ça *marche*).

La démonstration de l'indépendance de l'axiome du choix avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel contient de belles idées, mais elle est compliquée. Elle nécessite de bien avoir compris la notion de modèle et le théorème de complétude du calcul des prédicats, qui assure que des formules sont non contradictoires si et seulement si elles ont un modèle commun. La construction d'un modèle commun aux axiomes de Zermelo Fraenkel et à l'axiome du choix (grâce aux ensembles constructibles de Gödel) et d'un modèle commun aux axiomes de Zermelo Fraenkel et à la négation de l'axiome du choix (grâce au Forcing de Paul Cohen) est longue et parfois fastidieuse techniquement (pour tout cela, voir [Jec77b]). Même ainsi, ces modèles étant construit à partir d'un modèle – dont on admet l'existence – des axiomes de Zermelo-Fraenkel, on n'obtient qu'un résultat de consistance relative, c'est à dire qu'on ne prouve l'indépandendance de l'axiome du choix et des axiomes de Zermelo-Fraenkel que si ceux-ci sont consistants, c'est à dire non contradictoires. Or, un célèbre théorème du à Gödel affirme que leur consistence est indémontrable.

L'axiome du choix a eu plus de mal à être accepté comme intuitivement évident que d'autres axiomes, la fonction de choix pouvant être difficile à se représenter dans le cas de certains ensemble non dénombrables, par exemple si X est l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$. Ceux qui mettent en doute l'axiome du choix tentent de montrer qu'il implique des résultats surprenants ; l'exemple qu'on donne généralement est celui de ce qu'on appelle le paradoxe de Banach-Tarsky, qui affirme qu'une sphère de $\mathbf{R}^3$ peut être décomposée en un nombre fini de morceaux tels qu'en recombinant ces morceaux comme un puzzle, on obtienne deux sphères disjointes de même volume que la sphère initiale (C'est vrai, mais les morceaux en question ont des formes franchement pathologiques : on ne peut pas définir dessus une notion de volume et ils n'ont pas un nombre fini de composantes connexes.) Mais l'axiome du choix à finit par s'imposer, en ce sens qu'on l'emploie à peu près partout : pour montrer le théorème de Krull, le théorème de la base incomplète, l'existence de la clôture algébrique d'un corps, que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre, qu'une réunion dénombrable de sous-ensembles de réels négligeables pour la mesure de Lebesgue est négligeable,etc. En fait, c'est même pire que ça : pour chacun des exemples que je viens de donner, on peut montrer qu'ils sont indépendants des axiomes de Zermelo-Fraenkel. C'est à dire que sans l'axiome du choix, on peut construire des modèles dans lesquels tout les idéaux ne sont pas inclus dans un idéal maximal, tout les espaces vectoriels n'ont pas de bases, tout les corps n'ont pas de clôture algébrique, des groupes libres ont des sous-groupes non libres, on peut trouver un ensemble de réels qui est non négligeable, mais réunion d'un nombre dénombrable d'ensembles négligeables...vous voulez encore vous passer de l'axiome du choix ?

Lemme de Baire et axiome du choix

Revenons à nos moutons : la démonstration du lemme de Baire située plus haut utilise-t-elle l'axiome du choix ? Quand j'ai posé la question, on m'a souvent répondu non, et on s'est généralement justifié par une explication du type « Pour contruire la suite (x_n, r_n) jusqu'à l'ordre n, on n'a besoin de ne faire qu'un nombre fini de choix. Or, l'existence d'une fonction de choix se démontre trivialement quand X est fini » .

C'est faux, et voici pourquoi. Le problème viens de ce qu'une définition par récurence est quelque chose de délicat, bien plus délicat qu'une démonstration par récurence. Plus précisément, lorsque vous faites une définition par récurence vous utilisez, probablement sans s'en rendre compte comme je l'ai fait moi même pendant des années, le résultat suivant :

Proposition. *Soit E un ensemble et F une fonction définie sur l'ensemble des couples $(n, \{x_0, ..., x_{n-1}\})$ où $n \in \mathbf{N}$ et $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ est un n-uplet d'éléments de E (avec la convention qu'un 0-uplet est l'ensemble vide). Alors il existe une unique suite $(x_n)_{n \in n}$ telle que pour tout $n \in N$, $x_n = F((n, \{x_0, ..., x_{n-1}\}))$.*

Démonstration Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ distinctes vérifiant la condition ci-dessus. Soit n le plus petit entier tel que $x_n \neq y_n$. On a alors $x_m = y_m$ pour tout $m < n$, d'où $x_n = F((n, \{x_0, ..., x_{n-1}\})) = F((n, \{y_0, ..., y_{n-1}\})) = y_n$, une contradiction.

Pour l'existence, montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut construire un $n+1$-uplet $\{x_0, ..., x_n\}$ tel que pour tout $m \leqslant n$, $x_m = F(m, \{x_0, ..., x_{m-1}\})$. Supposons que cela soit faux : soit n le plus petit entier tel qu'on ne peut construire de tel $n+1$-uple. Il existe un n-uplet $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$ tel que pour tout $m \leqslant n$, $x_m = F((m, \{x_0, ..., x_{m-1}\}))$; $\{x_0, ..., x_{n-1}, F((n, \{x_0, ..., x_{n-1}\}))\}$ est alors un $n+1$-uplet satisfaisant la même condition, d'où une contradiction.

De plus, de même que ci-dessus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a unicité d'un tel n-uplet. C'est ce qui nous permet de conclure. En effet, pour tout entiers m,n tels que $m < n$, on a alors, si $\{x_1, ..., x_m\}$ et $\{y_1, ..., y_n\}$ sont les $m+1$-uplets et $n+1$-uplets définis comme ci-dessus, $\{x_1, ..., x_m\} = \{y_1, ..., y_n\}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut donc définir x_n comme étant le n^{eme} élément commun à tout les débuts de suite définis comme ci-dessus d'une longueur supérieure à n, et on vérifie facilement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie $x_n = F((n, \{x_0, ..., x_{n-1}\}))$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Dans cette démonstration, il est essentiel que pour un n donné, x_n soit défini de manière unique à partir de n et $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$. Sans cela vous pourrez bien définir pout tout n un n-uplet $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$ tel que pour tout $m \leqslant n-1$, $x_m = F((m, \{x_0, ..., x_{m-1}\}))$, mais vous ne serez pas sur de l'unicité de ce n-uplet, et vous ne pourrez donc pas prendre l'union de tout ces débuts de suite pour former une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = F((n, \{x_0, ..., x_{n-1}\}))$.

Dans la démonstration du lemme de Baire que nous avons donnée, on n'a pas unicité du choix possible de x_n et r_n à chaque étape. Cette démonstration est-elle fausse ? Pas de panique, l'axiome du choix nous permet de nous en tirer. En effet, pour tout ouvert O, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble des couples (x, r) tels que $B(x, r) \subset O \bigcap (\cap_{1 \leqslant i \leqslant n} O_i)$ et $r < 1/n$ est non vide. L'axiome du choix assure donc l'existence d'une fonction de choix f sur l'ensemble des ensembles de ce type, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, si on a construit la suite (x_n, r_n) jusquà l'ordre n, on peut poser $(x_{n+1}, r_{n+1}) = f(\{(x, r); B(x, r) \subset O \bigcap (\cap_{1 \leqslant i \leqslant n} O_i)$ et $r < 1/n\})$.

De l'axiome du choix partout

Lorsque j'eu compris pourquoi le lemme de Baire utilisait l'axiome du choix, ma grande surprise à été de découvrir que ce type de raisonnement – construire une suite par récurence en choisissant à chaque étape un élément parmi un ensemble non vide – se retrouvait très fréquemment. On l'utilise en particulier :

- pour démontrer le théorme de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert.
- Pour démontrer le théorème des fermés emboités dans un Banach.
- Pour démontrer qu'un espace métrique satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si et seulement si il satisfait celle de Bolzano-Weierstrass.

On l'utilise également (j'avais promis qu'on y reviendrait) pour montrer qu'un anneau est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'idéaux de cet anneau est stationnaire. Voici cette démonstration, du moins le sens qui utilise l'axiome du choix (pour l'autre, voir [Per82]).

Démonstration Montrons que si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire, tout idéal est de type fini. Pour cela, supposons qu'on aie un idéal I qui ne soit pas de type fini. Choisissons $x_0 \in I$; on a alors $\langle x_0 \rangle \subsetneq I$ ($\langle x_0 \rangle$ désigne l'idéal engendré par x_0).

On construit alors par récurence une suite $x_0, ...x_n, ...$ d'éléments de I telle que $\langle x_0 \rangle \subsetneq \langle x_0, x_1 \rangle \subsetneq$

... $\subsetneq$ $\langle x_0, ..., x_n\rangle$ $\subsetneq$ .... Pour cela, supposons cette suite construite jusqu'à l'ordre n. On a alors $\langle x_0, ..., x_n\rangle \subsetneq I$, d'où on peut choisir $x_{n+1} \in I$ tel que $\langle x_0, ..., x_n\rangle \subsetneq \langle x_0, ..., x_{n+1}\rangle$, ce qui conclut.

Evidemment, cette démonstration est aussi fausse que ma première démonstration du lemme de Baire ; et on peut la rendre juste de la même façon en utilisant une fonction de choix définie sur l'ensemble des ensembles du type $I - \langle X\rangle$, où X est une partie finie de I. En fait, une fois qu'on a compris comment fonctionne ce genre de démonstration, il est effectivement moins lourd de les écrire sous la forme ci-dessus en considérant à chaque fois que les terme «on choisit» sont une méta-définition pour « on prend l'élément image par la fonction de choix imposée dès le départ et définie sur un ensemble adapté de l'ensemble défini par le début de notre suite» l'ensemble adapté en question dépendant évidemment de la démonstration que vous êtes en train de faire.

L'utilisation inconsciente – ou peut-être camouflée pour ne pas faire peur aux étudiants – de cet axiome est très répendue dans ce genre de situation, des manuels réputés d'analyse ne font pas remarquer que le lemme de Baire ou le théorème de projection sur un convexe fermé emploie l'axiome du choix, alors qu'ils insistent sur le fait que le théorème de Hahn-Banach utilise le lemme de Zorn, équivalent célèbre de cet axiome.

Axiome du choix dénombrable, axiome du choix dépendant

Une des tentations de ceux qui se mefiaient de l'axiome du choix a été d'en trouver des formes plus faibles, mais suffisantes pour démontrer les résultats dont on avait besoin. Voici deux de ces plus célèbres versions faibles.

Axiome (du choix dépendant). *Soit X un ensemble, R une relation binaire sur X telle que pour tout $x \in X$, l'ensemble des $y \in X$ tels que xRy est non vide. Alors il existe une suite $x_0, ..., x_n, ...$ d'éléments de X telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n R x_{n+1}$.*

Axiome (du choix dénombrable). *Soit X un ensemble dénombrable dont tout les éléments sont non vides. Alors X admet une fonction de choix.*

Proposition. *L'axiome du choix implique l'axiome du choix dépendant ; l'axiome du choix dépendant implique l'axiome du choix dénombrable.*

Démonstration Montrons que l'axiome du choix implique l'axiome du choix dépendant. Soit X un ensemble non vide, R une relation binaire sur X telle que pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que xRy. Soit Z l'ensemble des ensembles du type $X_x = \{y \in X;\ xRy\}$, où $x \in X$. Tout élément de Z est non vide, donc Z admet une fonction de choix f. On construit alors par récurence une suite $x_0, .., x_n, ...$ d'éléments de X en posant $x_{n+1} = f(X_{x_n})$, et cette suite convient (c'est encore une fois le même genre de démonstration que pour le lemme de Baire).

Admettons maintenant l'axiome du choix dépendant. Soit X un ensemble dénombrable dont tout les éléments sont non vides. X étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments $x_1, ..., x_n, ...$ Soit S l'ensemble des suites finis $t = (t_1, ...t_n)$ à valeurs dans $\cup_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ telle pour tout $i \leqslant n$, $t_i \in x_i$. Pour tout $t \in S$, on définit $|t|$ comme étant la longueur de t.

Soit R la relation binaire définie sur S par sRt si et seulement si t est plus longue d'un élément que s et s est formée des $|s|$ premiers éléments de t. Pour tout $s \in S$, il existe $t \in S$ tel que sRt (il suffit de rajouter un élément de $x_{|s|+1}$ à la fin de s). D'après l'axiome du choix dépendant, on peut dons construire une suite de suite finie $s_1, ..., s_n, ...$ telle que si $m < n$, s_m est un segment initial de s_n. En prenant l'union de toute ces suites, on obtient donc une suite $s_1, ..., s_n, ...$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $s_n \in x_n$, ce qui donne une fonction de choix sur X en posant $f(x_n) = s_n$.

Ces implications sont des implications strictes : l'axiome du choix dénombrable n'implique pas l'axiome du choix dépendant, et l'axiome du choix dépendant n'implique pas l'axiome du choix général. Cela se montre par les mêmes méthodes que les résultats d'indépendance de l'axiome du choix avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel, et nous ne aventurerons pas en ces eaux dangereuses.

Proposition. *Le lemme de Baire est une conséquence de l'axiome du choix dépendant.*

Démonstration Soit O un ouvert de E. On définit une relation binaire sur l'ensemble des couples (B, n), où $n \in \mathbf{N}$ et B est une boule ouverte de E de rayon inférieur à $1/n$, par $(B(x,r), m)R(B(y,s), n)$ si et seulement si $n = m + 1$ et $B(y,s) \subset B(x, r/2) \bigcap (\cap_{1 \leqslant i \leqslant n} O_i) \bigcap O$. Cette relation vérifie les conditions qui permettent d'apliquer l'axiome du choix dépendant, et la suite de boules $B(x_n, r_n)$ qu'elle définie est telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n/2)$, $r_n \leqslant 1/n$ et $B(x_n, r_n) \subset O \bigcap (\cap_{1 \leqslant i \leqslant n} O_i)$. On conclut alors de la manière habituelle.

Par contre, l'axiome du choix dénombrable ne suffit pas à priori à démontrer le lemme de Baire en général ; en effet, dans la démonstration du lemme de Baire, la fonction de choix qu'on utilise est définie sur un ensemble X indicié non pas par $\mathbf{N}$, mais par l'ensemble des couple (O, n), où $n \in \mathbf{N}$ et O est un ouvert de E ; X n'est donc pas dénonbrable. En revanche, si E est séparable, on peut démontrer le lemme de Baire dans E en utilisant le choix dénombrable : il suffit d'adapter la démonstration en prenant une base dénombrable d'ouverts.

Exercice. Établir :

- l'équivalence de la noethérianité et de la condition de chaîne fini sur les idéaux à l'aide de l'axiome du choix dépendant.
- le théorème des fermés emboités dans un Banach et l'équivalence des propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass pour un espace métrique à l'aide du choix dépendant, du choix dénombrable si les espaces considérés sont complets.
- le théorème de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert à l'aide du choix dénombrable.

Un peu de mathématiques alternatives

L'axiome du choix a une conséquence désagréable en théorie de la mesure : il permet de construire un sous ensemble de $[0; 1]$ non mesurable pour la mesure de Lebesgue (voir [Jec78]). En revanche, il existe des axiomes, contradictoires avec l'axiome du choix, qui permettent de démontrer que tout sous-ensemble de $[0; 1]$ est mesurable ; voici le plus célèbre.

Soit ω^ω l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{N}$. A un sous ensemble A de ω^ω, on associe le jeu G_A suivant : deux joueurs choisissent à tour de rôle un entier naturel. Soit $a_1, ..., a_n, ...$ la suite des choix du premier joueur, $b_1, ..., b_n, ...$ celle du second. Si la suite $a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...$ est dans A, le premier joueur a gagné ; sinon, il a perdu. (Il n'y a aucune différence formelle entre l'ensemble A et le jeu G_A : G_A est juste une interprétation intuitive de cet ensemble.)

Une stratégie pour le premier joueur est une fonction σ définie sur l'ensemble des suites finies de $\mathbf{N}$; cette stratégie et gagnante, si pour toute suite $b_1, ..., b_n, ...$, la suite $\sigma(\varnothing), b_1, \sigma(b_1), ..., b_n, \sigma(b_1, ..., b_n), ...$ est dans A, c'est à dire si le premier joueur dispose d'une manière de jouer en fonction seulement de ce que l'autre à joué avant lui qui le fasse gagner à chaque coup.

Evidement, on peut également définir une stratégie et une stratégie gagnante pour le second joueur. On dit que le jeu A est déterminé si un des deux joueur a une stratégie gagnante.

Axiome (de détermination). *Pour tout $A \subset \omega^\omega$, G_A est déterminé.*

L'axiome de détermination à une conséquence importante : *il permet de démontrer que tout sous-ensemble de $[0; 1]$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue complétée (voir [Jec77b]).* Ceci prouve qu'il est contradictoire avec l'axiome du choix général, qui permet lui de construire un ensemble de réels non mesurables. Mais l'axiome de détermination permet de démontrer une version plus faible de l'axiome du choix :

Théorème. *L'axiome de détermination implique que tout ensemble dénombrable d'ensembles tous non vide de cardinalité inférieure à $2^{\aleph_0}$ admet une fonction de choix.*

Démonstration Un ensemble de cardinalité inférieure à $2^{\aleph_0}$ peut s'injecter dans l'ensemble des suites d'entiers naturels (on code donc chaque élément par une suite). Désormais, j'identifierai chaque ensemble de cardinalité inférieure à $2^{\aleph_0}$ avec un ensemble de suites à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Soit donc $X = (x_0, ..., x_n, ...)$ un ensemble dénombrable d'ensembles de suites à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit alors le jeu suivant : soit $(a_0, ..., a_n, ...)$ la suite des choix du premier joueur, $(b_0, ..., b_n, ...)$ celle du second. Le second joueur à gagné si et seulement si $(b_1, ..., b_n, ...) \in x_{a_0}$.

Le premier joueur ne peut pas avoir de stratégie gagnante à ce jeu : quel que soit le nombre b_0 qu'il joue en premier, il ne peut avoir de stratégie qui lui permette de répondre à la suite $(b_1, ..., b_n, ...)$ où $(b_1, ..., b_n, ...)$ est un élément quelconque de x_{a_0}.

D'après l'axiome de détermination, le second joueur a donc une stratégie gagnante σ. (Attention : si on ne suppose ni l'axiome de détermination, ni l'axiome du choix, le fait que le premier joueur n'ait pas de stratégie gagnante n'implique pas que le second en ait une). σ nous donne alors une fonction de choix sur X (a chaque $n \in \mathbf{N}$, on associe l'élément de x_n qu'on obtient quand le premier joueur joue n suivit d'une suite infinie de 0 et le second sa stratégie gagnante).

Cette version faible de l'axiome du choix suffit pour montrer le lemme de Baire sur $\mathbf{R}$; elle suffit également pour montrer qu'une union dénombrable d'ensemble négligeables pour la mesure de Lebesgue est négligeable. Si on admet donc l'axiome de détermination, on peut construire une théorie de la mesure et une analyse dans laquelle les propriétés essentielles de la droite réelle restent conservées, mais dans laquelle tout ensemble de réel est mesurable.

A priori, cela relève d'un délire de logicien : en explorant deux mathématiques différentes à partir de deux axiomatiques différentes, on réduit les mathématiques à un jeu formel, alors qu'elles ont un sens, sens intuitif qu'on ne peut conserver qu'en partant d'axiomes « moralement » exacts. Pourtant, certains axiomes contradictoires avec l'axiome du choix on permit de construire des mathématiques élégantes, qui premettent d'éclairer la signification des axiomes en question. Imposer ces axiomes revient à restreindre la notion d'ensemble de façon à éliminer les sous-ensembles pathologiques de $\mathbf{R}$; les résultats ainsi obtenus ont des applications en théorie de la mesure ou topologie. Il s'agit là d'un domaine qui s'appelle la *theorie descriptive des ensembles*, dont je ne dirai rien de plus parce que je n'y connais rien (mais si Alain pouvais nous faire un topo sur le sujet, ça serait très bien).

Question. *L'axiome de détermination est-il consistant avec l'axiome du choix dépendant ? Avec l'axiome du choix dénombrable ?*

Avant toute chose, il faudrait se demander si l'axiome de détermination est consistant avec ceux de Zermelo-Frankel : c'était encore au stade de conjecture dans les ouvrages que j'ai lu, et je ne sais pas où on en est actuellement.

Si l'axiome de détermination est consistant avec l'axiome du choix dépendant, on peut se passer d'une démonstration du lemme de Baire à l'aide de l'axiome de détermination en se plaçant dans un modèle de ces deux axiomes, dans lequel le lemme de Baire sera vrai pour un Banach quelconque.

Une autre conséquence de l'axiome du choix utilisée en analyse est le thérème de l'ultrafiltre.

Définition. *Soit E un espace topologique, X l'ensemble des ouverts sur cet espace. Un filtre sur E est un sous-ensemble F de X tel que si $O \in F$ et $O \subset O'$, $O' \in F$ et que si $O_1, O_2 \in F$, $O_1 \cup O_2 \in F$.*

Un filtre propre est un filtre qui n'est pas égal à X tout entier.

Un filtre maximal est un filtre propre maximal pour l'inclusion.

Théorème (de l'ultrafiltre). *Tout filtre est inclus dans un filtre maximal*

Pour la démonstration, très classique voir [Sch93].

Le théorème de l'ultrafiltre suffit à démontrer le théorème de Tychonoff, qui affirme qu'un produit d'espace compact est compact (voir [Sch93]).

D'autre part, c'est un énoncé strictement plus faible que l'axiome du choix (voir [Jec77b]).

Question. *Le théorème de l'ultrafiltre est-il consistant avec l'axiome de détermination ? Avec l'axiome du choix dépendant ? Celui du choix dénombrable ?*

Si le théorème de l'ultrafiltre est consistant avec l'axiome de détermination, on peut obtenir une analyse dans laquelle tout ensemble de réels est mesurable et le théorème de Tychonoff reste vrai ; avec l'axiome du choix dépendant en plus, le lemme de Baire reste vrai également dans le cas général. Mais je ne sais pas si c'est aussi intéressant que de montrer les conséquences du théorème de la page précédente.

Pour en savoir plus...

[Bar77] J. Barwise (ed.), *Handbook of mathematical logic*, North Holland, 1977.

[Bha94] Vandana Bhandari, *L'axiome du choix*, 1994.

[CL94] René Cori and Daniel Lascar, *Logique mathématique, t2*, Masson, 1994.

[Hal74] Paul R. Halmost, *Naive set theory*, Springer, 1974.

[Jec77a] Thomas J. Jech, About The Axiom Of Choice, 345–370, In Barwise [Bar77], 1977, pp. 345–370.

[Jec77b] Thomas J. Jech, *The axiom of choice*, North Holland, 1977.

[Jec78] Thomas J. Jech, *Set theory*, Academic Press, 1978.

[Kri72] Jean-Louis Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, PUF, 1972.

[Kun80] Kenneth Kunen, *Set theory*, North Holland, 1980.

[Mic64] Jan Micielsky, *On the axiom of determinatness*, Fund. Math. **54** (1964).

[Per82] Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, Publication de l'ENSJF, 1982.

[Sch93] Laurent Schwartz, *Analyse I: théorie des ensembles et topologie*, Hermann, 1993.